Tentamen TF1
31 januari 2011
9.00h-12.00h

Dit tentamen bestaat uit 20 onderdelen verdeeld over 4 opgaven.
Met elk onderdeel zijn 5 punten te verdienen.
Begin bij **elke opgave** op een **nieuw** vel papier met daarop uw **naam**.

In dit tentamen wordt (net als in het boek en in het college) de absolute temperatuur aangeduid met T, en de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K. Ook gebruiken we soms de afkorting $\beta = 1/(k_B T)$. Tevens mag u gebruiken dat de elementaire lading gelijk is aan $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro aan $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante aan $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Ook is $\hbar = h/2\pi$ met h de constante van Planck. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa. De Stokes-Einstein relatie luidt $D = k_B T/(6\pi\eta a)$ voor een bol met straal a in een medium met viscositeit η.

BEARGUMENTEER UW ANTWOORDEN LEESBAAR EN BONDIG.

ZORG ER VOOR DAT UW NAAM STAAT OP ELKE INGELEVERDE PAGINA.

REKENMACHINES EN ANDERE ELECTRONISCHE HULPMIDDELEN ZIJN NOCH TOEGESTAAN NOCH NODIG —IN GEVAL VAN NUMERIEKE ANWOORDEN VOLSTAAT EEN AFSCHATTING VAN $\sim$ 1 SIGNIFICANT CIJFER OF DE ORDE VAN GROOTTE.

Opgave 1

We beschouwen een 1-dimensionale quantummechanische harmonische oscillator met massa m en hoekfrequentie ω, waarvan de energie toestanden dus geschreven kunnen worden als $\epsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ voor $n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \infty$. De oscillator is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

(a) Bereken de kanonieke partitiesom van dit deeltje.

(b) Bereken de kans P_n dat de oscillator zich in de n-de toestand bevindt.

(c) Bereken de gemiddelde energie $u_q(T)$ van de quantum oscillator.

In de hoge-T limiet, $T \gg T_{cr}$ met T_{cr} een cross-over temperatuur, verwacht men dat de oscillator zich klassiek gedraagt. De energie bij uitwijking x en impuls p wordt dan gegeven door $E(x,p) = p^2/(2m) + m\omega^2 x^2/2$.

(d) Geef een afschatting voor T_{cr}. Beargumenteer uw antwoord kort.

(e) Controleer of de gemiddelde energie $u_k(T)$ van de klassieke oscillator al dan niet overeenkomt met $u_q(T)$ voor $T \gg T_{cr}$ uit onderdeel (c). Waarom wel of waarom niet?

Opgave 2 —begin op een nieuw vel s.v.p.

We beschouwen het twee-dimensionale oppervlak van een drie-dimensionaal kristal. Dit oppervlak heeft M posities waarop deeltjes kunnen adsorberen. Een positie is ófwel onbezet ófwel bezet door één deeltje, en de adsorptie op een positie beïnvloedt de adsorptie op naburige posities níet. Een geadsorbeerd deeltje bevindt zich slechts in één microtoestand met energie ϵ; de energie van een onbezette positie kiezen we als nulpunt.

(a) Indien er N deeltjes geadsorbeerd zijn, met $0 \leq N \leq M$, wat is dan de entropie $S(M,N)$ van het oppervlak?

(b) Bereken de temperatuur T van dit systeem voor het geval dat het oppervlak in evenwicht N deeltjes bevat (dus zodat de totale energie $E = N\epsilon$).

Het oppervlak wordt nu beschouwd in thermisch en diffusief evenwicht met een gas op temperatuur T en chemische potentiaal μ; de energie E en het aantal geadsorbeerde deeltjes is dus niet langer vast.

(c) Bereken eerst de groot-kanonieke partitiesom $\mathcal{Z}_1(T,\mu)$ van een enkele adsorptie-positie, en daarna de groot-kanonieke partitiesom $\mathcal{Z}_M(T,\mu)$ van het gehele oppervlak van M adsorptie-posities.

(d) Bereken de kans $P(T,\mu)$ dat een adsorptie-positie bezet is.

(e) Schets de bezettingskans $P(T,\mu)$ als functie van μ in één figuur voor twee temperaturen T_1 en T_2 met $T_2 \gg T_1$. Geef ϵ aan op de μ-as, en de uiterste waarden op de P-as van de figuur. Gebruik uw antwoord bij (d) en/of fysische argumenten om de vorm en de verschillen tussen de twee adsorptie isothermen te verklaren.

Z.O.Z. VOOR HET VERVOLG

Opgave 3 —begin op een nieuw vel s.v.p.
We beschouwen een klassiek gas van N deeltjes in een volume V op temperatuur T. De druk p en de energie E van het gas worden gegeven door

$$p = \frac{Nk_BT}{V - Nb}; \qquad E = \frac{3}{2}Nk_BT, \tag{1}$$

met b een positieve constante.

(a) Geef een fysische interpretatie van b, en geef de orde van grootte van b voor het geval dat het een atomair gas (zoals bijvoorbeeld Neon of Argon) betreft.

(b) Bereken de arbeid W die het gas levert wanneer het isotherm en reversibel expandeert van een begin-volume V_b naar een eind-volume V_e.

(c) Bereken de toegevoerde warmte Q die benodigd is om de expansie van onderdeel (b) uit te voeren, alsmede de entropie verandering ΔS van het gas.

De Helmholtz vrije energie van een *ander* systeem van N deeltjes in een volume V blijkt gegeven te worden door

$$F(N, V, T) = Nk_BT\left[-1 + \ln\frac{N\Lambda^3}{V - Nb}\right] - a\frac{N^2}{V}, \tag{2}$$

met a en b positive constanten en met Λ een functie van T maar niet van N en V. Dit systeem blijkt een kritieke temperatuur T_c en een kritieke dichtheid ρ_c te hebben.

(d) Bereken de druk $p(\rho, T)$ en de chemische potentiaal $\mu(\rho, T)$ met $\rho = N/V$ de dichtheid van dit systeem.

(e) Beschrijf kort de toestand van dit systeem voor $\rho = \rho_c$ voor de drie gevallen (i) $T > T_c$, (ii) $T = T_c$, en (iii) $T < T_c$.

Opgave 4 —begin op een nieuw vel s.v.p.
De snelheid $\mathbf{v}(t)$ op tijdstip t van een bolvormig deeltje met massa m en straal a in een vloeibaar oplosmiddel met viscositeit η op temperatuur T voldoet aan de Langevin vergelijking

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -6\pi\eta a\mathbf{v} + \mathbf{F}, \tag{3}$$

waarbij $\mathbf{F}$ de niet-frictie kracht is die werkt op het deeltje.

(a) Bereken de driftsnelheid $\mathbf{v}_d$ van het deeltje voor het geval dat het deeltje door de aardse gravitatie kracht $\mathbf{F} = -mg\hat{z}$ in de negatieve $\hat{z}$-richting naar beneden wordt getrokken.

(b) Bereken de Brownse tijdschaal t_B die het ballistische en diffusieve regime van elkaar scheidt, voor het geval dat $\langle\mathbf{F}\rangle = 0$ (dan beschrijft dus $\mathbf{F}$ bijv. de kracht door wisselwerkingen met het oplosmiddel).

(c) Als gegeven is dat $\langle\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t')\rangle = C\exp[-|t-t'|/t_B]$, bereken dan C met behulp van het equipartitie theorema.

De verplaatsing $x(t)$ van het deeltje in de x-richting gedurende het tijdsinterval t blijkt te voldoen aan de waarschijnlijkheidsverdeling

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \tag{4}$$

met diffusie coefficient D.

(d) Laat zien dat voldaan is aan behoud van totale waarschijnlijkheid.

(e) Bereken de tijdsafhankelijkheid van de gemiddelde kwadratische verplaatsing $\langle x^2\rangle(t)$.

EINDE