Hertentamen **Statistische Fysica**, 11 maart 2013, 9.00h-12.00h, bestaande uit 4 opgaven. Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam. De opgaven bestaan bij elkaar uit 20 deelvragen, met elke deelvraag is 5 punten te verdienen. Aantekeningen en electronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

In dit tentamen wordt de absolute temperatuur aangeduid met T, de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K, en $\beta = 1/(k_BT)$. De elementaire lading is $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro is $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante is $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa, en de viscositeit van water aan $\eta = 10^{-3}$ Pa s. De Stokes-Einstein relatie voor de diffusie coefficient van een bol met straal a luidt $D = k_BT/6\pi\eta a$.

Opgave 1 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen eerst een enkel deeltje dat zich in 3 microtoestanden kan bevinden, ofwel in de grondtoestand met energie 0, ofwel in de eerste aangeslagen toestand met energie $\epsilon > 0$, ofwel in de tweede aangeslagen toestand met energie 2ϵ. Het deeltje is in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T.

(a) Wat is de kans dat het deeltje in de grondtoestand zit?

(b) Bereken de temperatuur-afhankelijke gemiddelde energie $u(T)$ van dit deeltje. Bereken of geef op basis van fysische argumenten de gemiddelde energie van dit deeltje in (i) de hoge-T en (ii) de lage-T limiet.

We beschouwen nu een een deeltje dat niet in slechts drie maar in oneindig veel microtoestanden kan zitten, met energie $\epsilon_n = n\epsilon$ in microtoestand $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$. Wederom geldt $\epsilon > 0$, en is er sprake van thermisch evenwicht op temperatuur T.

(c) Bereken kanonieke partitiesom $Z(T)$ van dit deeltje, en vervolgens de kans P_n om het deeltje in toestand n aan te treffen.

(d) Geef zowel de hoge- als ook de lage-T limiet van de gemiddelde energie van dit deeltje, dan wel op basis van een berekening dan wel op basis van fysische argumenten.

We beschouwen nu $N \gg 1$ identieke niet-wisselwerkende deeltjes, elk vastgeprikt op een roosterpunt en elk met een bekend verondersteld een-deeltjes kanonieke partitiesom $Z_1(T)$.

(e) Geef een uitdrukking voor de Helmholtz vrije energie $F(N, T)$ van het N-deeltjes systeem, en voor de chemische potentiaal $\mu(T)$. Geef voor zowel F als μ aan of ze extensief, intensief, beide, of geen van beide zijn.

Opgave 2 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen één enkel klassiek puntdeeltje met massa m in een twee-dimensionaal vierkant vlak met een oppervlakte $A = L \times L$. De positie van het deeltje is (x, y), de impuls is (p_x, p_y), en de energie is $E = (p_x^2 + p_y^2)/(2m)$. De randen van het vierkante oppervlak worden op een vaste temperatuur T gehouden, zodat de partitiesom van dit ene deeltje gegeven wordt door

$$Z_1 = \frac{1}{h^2} \int dx \int dy \int dp_x \int dp_y \exp(-\beta E), \tag{1}$$

met h de constante van Planck.

(a) Geef de integratie grenzen van alle vier de variabelen in de formule voor Z_1, en bereken vervolgens Z_1.

(b) Wat is de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ van dit deeltje?

(c) Bereken de kans dat $E < k_BT$.

We beschouwen nu N van deze deeltjes in hetzelfde twee-dimensionale oppervlak $L \times L$. Het blijkt dat de Helmholtz vrije energie wordt gegeven door $F(N, A, T) = Nk_BT[-1 + \ln(N\Lambda^2/A)]$, met Λ de thermische golflengte.

(d) Bereken de chemische potentiaal μ van de deeltjes.

(e) In de linkerhelft van het vierkant wordt nu een constant electrisch veld aangelegd, zodanig dat elk deeltje een potentiële energie $\epsilon < 0$ heeft wanneer het in de linkerhelft zit. In de rechterhelft zit geen veld. Geef, voor het geval dat de linker- en rechterhelft precies even groot zijn, de kans om een gegeven deeltje in de linkerhelft aan te treffen.

Opgave 3 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een klassiek ideaal gas van N identieke puntdeeltjes in een volume V, zodanig dat de gemiddelde energie gegeven wordt door $E = 3Nk_BT/2$ voor temperatuur T.

(a) Laat voor vaste N zien dat een reversibele infinitesimale adabatische volume verandering dV leidt tot een temperatuursverandering $dT = -(2T/3V)dV$.

(b) Bereken de temperatuur T' van het gas nadat het volume reversibele en adiabatisch verdubbeld is van een beginvolume V en begintemperatuur T.

(c) Bereken de arbeid W_a die het gas levert tijdens de adiabatische expansie van onderdeel (b). Bereken of beargumenteer of W_a groter, kleiner, of gelijk is aan de arbeid W_i van een reversibele isotherme expansie vanuit dezelfde begintoestand naar hetzelfde eindvolume?

Het aantal deeltjes in het gas kan nu fluctueren vanwege diffusief contact met een gas reservoir op chemische potentiaal μ. In het gas bevindt zich een wand met M adsorptie-posities waarop gas-atomen kunnen adsorberen. Een positie is ófwel onbezet ófwel bezet door een deeltje. De adsorptie op een positie beïnvloedt de adsorptie op naburige posities níet. Een geadsorbeerd deeltje bevindt zich slechts in één microtoestand met energie ϵ; de onbezette adsorptie-positie heeft een energie gelijk aan nul.

(d) Bereken de groot-kanonieke partitie som $\mathcal{Z}_1(T,\mu)$ van een enkele adsorptie-positie in diffusief en thermische evenwicht met het gas op temperatuur T en chemische potentiaal μ.

(e) Bereken het gemiddeld aantal geadsorbeerde deeltjes $\langle m \rangle$ op de hele wand als functie van μ en T, en schets deze afhankelijkheid in 1 plotje als functie van μ voor (i) $k_BT \gg \epsilon$ and (ii) $k_BT \ll \epsilon$.

Opgave 4 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
De snelheid $\mathbf{v}(t)$ op tijdstip t van een bolvormig deeltje met massa m en straal a in water met viscositeit η op kamertemperatuur T voldoet aan de Langevin vergelijking

$$m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -6\pi\eta a\ \mathbf{v}(t) + \mathbf{F} \tag{2}$$

waarbij $\mathbf{F}$ een externe kracht is die werkt op het deeltje.

(a) Als dit deeltje door de aardse gravitatie kracht $\mathbf{F} = -mg\hat{z}$ in de negatieve $\hat{z}$-richting naar beneden wordt getrokken, bereikt het na verloop van tijd een constante val- of driftsnelheid $\mathbf{v}_d$. Bereken $\mathbf{v}_d$.

(b) Bereken $\mathbf{v}(t)$ voor het geval dat $\mathbf{F} = 0$ en het deeltje een beginsnelheid $\mathbf{v}_0$ heeft.

Voor het geval dat $\mathbf{F}$ de kracht door wisselwerkingen met het oplosmiddel beschrijft, en $\langle \mathbf{F} \rangle = 0$, zal het deeltje op lange tijdschaal Browns bewegen. De verplaatsing $x(t)$ van het deeltje in de x-richting gedurende het tijdsinterval t blijkt dan te voldoen aan de waarschijnlijkheidsverdeling

$$W(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{3}$$

met D de diffusie coefficient.

(c) Bereken de gemiddelde kwadratische verplaatsing $\langle x^2(t) \rangle$ als functie van de tijd t.

(d) Bepaal de zgn. diffusie tijd t_d die een deeltje met straal $a = 1\mu m$ nodig heeft om over een afstand a in de x-richting te diffunderen in water bij kamertemperatuur.

Een ideaal gas van N_A atomen A ondergaat, bij vaste temperatuur T en volume V, de chemische polymerisatie reactie $n\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A}_n$ met de integer $n > 1$ constant.

(e) Als er na de reactie een nieuw evenwicht is ingesteld met N_p polymeren A_n, wat is dan het aantal vrije atomen A na de reactie. Bereken de verhouding van de druk p_v vóór de reactie en de druk p_n ná de reactie, dus p_v/p_n.

— EINDE —