Tentamen **Statistische Fysica**, vrijdag 3 januari 2014, 13.30h-16.30h, bestaande uit 4 opgaven. Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam. De opgaven bestaan bij elkaar uit 20 deelvragen, met elke deelvraag is 5 punten te verdienen. Aantekeningen en electronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

In dit tentamen wordt de absolute temperatuur aangeduid met T, de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$J/K, en $\beta = 1/(k_BT)$. De elementaire lading is $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, het getal van Avogadro is $N_A = 6 \times 10^{23}$ mol^{-1}, en de gas constante is $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}. Zoals u weet is 1 atm druk in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa, en de viscositeit van water aan $\eta = 10^{-3}$ Pa s. De Stokes-Einstein relatie voor de diffusie coefficient van een bol met straal a luidt $D = k_BT/6\pi\eta a$.

Opgave 1 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een homogeen klassiek gas van N identieke deeltjes in een volume V op temperatuur T, met druk $p = Nk_BT/(V - Nb)$ en gemiddelde energie $U = 3Nk_BT/2$. Hier is b een positieve constante.

(a) Bereken het eindvolume V_2 als het gas isotherm en reversibel een hoeveelheid warmte Q opneemt, vanuit een beginvolume V_1.

(b) Bereken de eind temperatuur T_e na een adiabatische expansie van dit gas van een begin volume V_b naar een eind volume V_e, voor een begin temperatuur T_b.

(c) Bereken de verhouding van het aantal microtoetanden van het gas voor en na de expansie van onderdeel (b). Geef ook een fysische interpretatie van de constante b.

(d) Bereken voor dit gas de warmte capaciteit C_p bij vaste druk.

(e) Bereken voor temperatuur T de goed-genormeerde kansverdeling $f(v_x)$ van de snelheidscomponent v_x van een gas deeltje met massa m, en hieruit het gemiddelde $\langle v_x \rangle$ en de variantie $\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2$.

Opgave 2 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen *twee* vastgeprikte deeltjes, genaamd 1 en 2, op temperatuur T. Deeltje $i = 1, 2$ kan ofwel in de grondtoestand zitten met energie nul, ofwel in de aangeslagen toestand met energie ϵ_i, met $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$.

(a) Geef het aantal microtoestanden van dit twee-deeltjes systeem, en bereken de kanonieke partitiesom $Z(T)$.

(b) Bereken de kans P dat één van de deeltjes in de grondtoestand zit en de ander in de aangeslagen toestand. Schets vervolgens P als functie van T, en bereken of beredeneer de hoge-T en de lage-T limiet van P.

(c) Bereken de gemiddelde energie $u(T)$ en de entropie $s(T)$ van dit systeem.

We beschouwen nu $N \gg 1$ vastgeprikte deeltjes van bovenstaand type "1", dus met energie nul of $\epsilon_1 > 0$ maar zonder onderlinge wisselwerking.

(d) Geef een fysisch voorbeeld van een dergelijk N-deeltjes systeem en bereken de N-deeltjes partitiesom $Z_N(T)$.

(e) Bereken de Helmholtz vrije energie en de chemische potential van dit N-deeltjes systeem.

ZIE OMMEZIJDE

Opgave 3 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een mono-atomair klassiek ideaal gas van N identieke deeltjes in een uniform zwaartekrachtveld met valversnelling g en op temperatuur T. Het gas bevindt zich in een cylindrisch vat met straal R en hoogte H. Het grondoppervlak van de cylinder zit op $z = 0$ en de lange as van de cylinder is evenwijdig aan de z-as. De kinetische energie van één enkel deeltje met impuls $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ is $\mathbf{p}^2/2m$ met m de deeltjes massa. De totale energie E van één gasdeeltje op positie (x, y, z) wordt gegeven door

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mgz, \tag{1}$$

(a) Bereken de toestandssom Z_1 voor één deeltje.

(b) Bereken de kanonieke partitiesom $Z(N, V, T)$ van dit gas en laat zien dat hieruit de Helmholtz vrije energie

$$F(N, V, T) = Nk_BT[-1 + \ln\left(\frac{cN\Lambda^3}{1 - \exp[-\beta mgH]}\right)] \tag{2}$$

volgt, met Λ de thermische golflengte. Geef een uitdrukking voor c in termen van R, g, m, T, H.

(c) Bereken de druk p op het bovenvlak van de cylinder op hoogte $z = H$.

We verwaarlozen nu het zwaartekrachtsveld (dus we nemen aan dat $m = 0$).

(d) Bereken of geef of basis van fysische argumenten de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ van dit gas.

(e) Bereken de chemische potentiaal μ.

Opgave 4 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
Beschouw een adsorptie plek in contact met een gas op chemische potentiaal μ en temperatuur T. De plek kan (i) niet bezet zijn, (ii) bezet zijn met één geadsorbeerd gas deeltje, en (iii) bezet zijn met twee geadsorbeerde niet-wisselwerkende gas deeltjes. De energie van de plek is nul als de plek "leeg" is, en ϵ als de plek bezet is door één deeltje, en 2ϵ als de plek bezet is door twee deeltjes.

(a) Bereken de groot-kanonieke partitiesom $\mathcal{Z}_{gr}(\mu, T)$ van deze adsorptieplek.

(b) Bereken het gemiddeld aantal geadsorbeerde deeltjes $\langle N \rangle$ van deze adsorptieplek als functie van μ en T, en schets in een figuur $\langle N \rangle$ als functie van μ in (i) de hoge-T en (ii) de lage-T limiet.

We beschouwen nu een ander systeem, waarvan de druk gegeven wordt door

$$p = \frac{Nk_BT}{V - Nb} \exp\left[-\frac{aN}{k_BTV}\right], \tag{3}$$

met zowel $a > 0$ als $b > 0$ een constante. We noemen $N/V = \rho$ de dichtheid.

(c) Dit systeem heeft een kritieke temperatuur T_c en een kritieke dichtheid ρ_c. Als nu gegeven is dat $\rho_c = 1/(2b)$, bereken dan T_c.

(d) Beschrijf kort hoe het systeem zich gedraagt bij een isotherme compressie van zeer verdund ($\rho \ll \rho_c$) tot $\rho \simeq 2\rho_c$, voor het geval dat (i) $T \gg T_c$, (ii) $T = T_c$, en (iii) $T \ll T_c$.

Een ideaal gas van N_A atomen A ondergaat, bij vaste temperatuur T en volume V, de chemische polymerisatie reactie $n\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A}_n$ met de integer $n > 1$ constant.

(e) Geef de relatie tussen de evenwichtsconstante $K(T)$ van deze reactie en de partiële drukken p_A en p_{A_n} in evenwicht. Beargumenteer of de reactie naar rechts of links verschuift als de druk van het mengsel *verhoogd* wordt bij vaste temperatuur T.

— EINDE —