Toets 2 van de cursus Statistische Fysica Theorie en Experiment, 02/10/2015, 13:30-14:30. Alleen duidelijk leesbaar werk wordt nagekeken; onleesbaar of onnavolgbaar werk wordt beoordeeld als onvoldoende. Motiveer uw antwoorden kort en bondig. Schrijf uw naam op elk vel. Calculator, boek, of bundel zijn niet toegestaan; een blauwe of zwarte pen volstaat (s.v.p. geen potlood). Elk van de 10 deelvragen is maximaal 10 punten waard (totaal 100), besteed dus tijd aan elke deelvraag. Succes!

1. Een klassiek deeltje met massa m in een driedimensionaal gas van N deeltjes in een volume V op temperatuur T heeft een snelheidsvector (v_x, v_y, v_z). De dichtheid van het gas is $\rho = N/V$ en de druk is $p = \rho k_B T$.
   (a) Geef de correct genormeerde kansverdeling van $g(v_x)$, en het gemiddelde en de standaard deviatie van v_x.
   (b) Leid een uitdrukking af voor de vrije weglengte λ in het gas voor het geval dat de gasdeeltjes elk een identieke diameter d hebben en onderling botsen als biljartballen.

2. Het aantal gas-deeltjes dat per tijdsinterval Δt op een vlak oppervlak ter grootte A van de wand botst is $\Phi A \Delta t$, met Φ de deeltjesflux. Bereken Φ voor een klassiek ideaal gas van puntdeeltjes met massa m op temperatuur T en druk p. U mag hierbij gebruiken dat de gemiddelde absolute waarde van de snelheidscomponent v_x gegeven wordt door $\langle |v_x| \rangle = \sqrt{2k_BT}/\sqrt{\pi m}$.

3. We beschouwen een ideaal gas van puntdeeltjes, dus waarvoor $pV = Nk_BT$ en $U = 3Nk_BT/2$ met de gebruikelijke betekenis van de symbolen. De op het gas geleverde arbeid noemen we W en de naar het gas toegevoerde warmte noemen we Q. Het aantal deeltjes N is steeds constant.
   (a) Bereken W en Q voor een reversibele isotherme expansie van V naar $3V$.
   (b) Leid af dat $pT^{-5/2}$ constant is gedurende een reversibele adiabatische volumeverandering.

4. Een ideaal gas ondergaat een Joule expansie, waarbij de energie U van het gas constant is en de entropie S van het gas toeneemt terwijl er geen arbeid W wordt verricht op het gas. Leg kort en bondig uit waarom dit wel/niet compatibel is met de Eerste Hoofdwet $dU = TdS + dW$.

5. Bereken de maximale efficientie van een warmtemotor die werkt tussen twee warmtebaden op temperaturen 100°C en 15°C.

6. Twee lichamen met identieke warmtecapaciteit C_V maar op verschillende begintemperaturen T_1 en T_2 worden bij constant volume gebruikt als warmtebad voor een warmtemotor. Hierbij koelt het warmste lichaam af en warmt het koudste lichaam op tot een gezamenlijk eindtemperatuur T_e bereikt is. Bereken T_e voor het geval dat de motor de meest efficient mogelijke is.

7. De entropie S van een of andere substantie van N deeltjes in een volume V en energie U voldoet aan $S(U, V, N) = Nk_B \ln[VU^{3/2} f(N)]$ met $f(N)$ een niet nader bepaalde functie. Bereken de druk $p(N, V, T)$ en de interne energie $U(N, V, T)$ van deze substantie.

8. De interene energie U van een condensator met potentiaalverschil ψ tussen twee electroden met ladingen $+q$ en $-q$ voldoet aan $dU = TdS + \psi dq$, met T de temperatuur en S de entropie. Bij constante ψ wordt aan de condensator reversibel een hoeveelheid warmte Q toegevoerd. Welke thermodynamische potentiaal neemt dan toe met een hoeveelheid Q?

—— EINDE ————

Toets 2 Stat. Fys 2/10/2015

100 pt max tot
10 pt max per onderdeel

1. (a) $g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\; e^{-\frac{1}{2} m v_x^2 / k_B T}$

óf afleiding: $g(v_x) = C\, e^{-\frac{1}{2} m v_x^2 / k_B T}$

max 5

met $\int_{-\infty}^{\infty} dv_x\, g(v_x) = C \cdot \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}} = 1$ (normering)

dus $C = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2}$

$\langle v_x \rangle = 0$ (symmetrie)

óf $\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x\, v_x\, g(v_x) = 0$

max 2

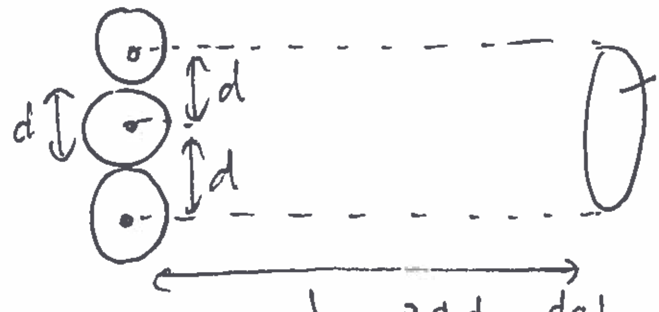
$\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$ aflezen uit Gauss

óf $\langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x\, v_x^2\, g(v_x) = \ldots = \frac{k_B T}{m}$

m.b.v. $\frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha v_x^2}$

max 3

(b)

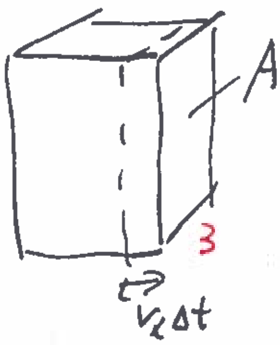


botsingsdoorsnede πd^2 4

λ zodat $\underbrace{\lambda \pi d^2}_{\text{volume van "buis"}} \rho = 1$ (dan 1 ander deeltje in "buis") 4

dus $\lambda = \frac{1}{\pi d^2 \rho}$ 2

2.



$\#\text{botsingen} = \int_0^{\infty} dv_x\, g(v_x) \left(\frac{N}{V}\right) A\, v_x\, \Delta t \equiv A \Delta t\, \Phi$ 3

dus $\Phi = \int_0^{\infty} dv_x\, g(v_x)\, v_x \left(\frac{N}{V}\right) = \left(\frac{N}{V}\right) \frac{1}{2} \langle |v_x| \rangle =$ 3

$= \frac{p}{2 k_B T} \sqrt{\frac{2 k_B T}{\pi m}} = \frac{p}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ 1

3 (a) $dU = đQ + đW = đQ - pdV = 0$ want $dU = \frac{3}{2}Nk_B dT = 0$

1 2

dus $Q = -W = \int_V^{3V} p\,dV = Nk_BT \int_V^{3V} dV \frac{1}{V} = Nk_BT \ln 3$

3 2 2

(b) ~~[illegible]~~

$dU = đQ - pdV = -pdV$ want $đQ = 0$ in adiab proces

2

$dU = \frac{3}{2}Nk_B dT$, $-pdV = -\frac{Nk_BT}{V}dV$

dus $\frac{2}{3}\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0 = d(\ln V^{2/3} + \ln T)$ 3

dus $TV^{2/3}$ is constant 2

Omdat $V = \frac{Nk_BT}{p}$ geldt ook: $T \cdot \left(\frac{T}{p}\right)^{2/3} =$ 3

$= T^{5/3}/p^{2/3}$ is constant

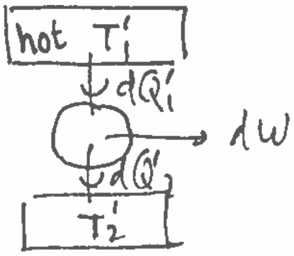
dus $pT^{-5/2}$ constant. $= (T^5/p^2)^{1/3}$

4 De Eerste Hoofdwet $dU = đQ + đW$ kan alleen worden omgeschreven naar $dU = TdS + đW$ als $đQ = TdS$, dus alleen voor een reversibel proces. Anders geldt $dS \geq \frac{đQ}{T}$. Een reversibele verandering van begin- naar eindvolume bij vaste T gaat gepaard met $W \neq 0$ (dus $đW \neq 0$) waarbij $dU = đQ + đW = 0$ dus $TdS = pdV \neq 0$. Joule expansie is dus wel compatibel met Eerste Hoofdwet, maar $đQ \neq TdS$ voor dit proces.

5 $\eta_{max} = 1 - \frac{273+15}{273+100}$ is de efficientie van Carnot machine.

10 slechts 5 pnt als in °C

⑥



$$dQ_1' = -C_V\, dT_1' \qquad 2$$

$$dQ_2' = C_V\, dT_2' \qquad 2$$

meest efficient: Carnot: $\dfrac{dQ_1}{T_1} = \dfrac{dQ_2}{T_2}$ 2

dus $\dfrac{dT_1'}{T_1'} + \dfrac{dT_2'}{T_2'} = 0$

$$\parallel$$

$$d(\ln(T_1'T_2')) \qquad 2$$

dus $T_1'T_2'$ blijft constant $= T_e^2 = T_1 T_2$

$$\Rightarrow T_e = \sqrt{T_1 T_2} \qquad 2$$

⑦ $\dfrac{1}{T} \overset{2}{=} \left(\dfrac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} \overset{1}{=} N k_B \dfrac{3}{2} \dfrac{1}{U} \Rightarrow U = \dfrac{3}{2} N k_B T$ 2

$\dfrac{P}{T} \overset{2}{=} \left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} \overset{1}{=} N k_B / V \Rightarrow p = \dfrac{N k_B T}{V}$ 2

⑧ $dU = TdS + \psi dQ$ dus $d(U - \psi Q) = dU - \psi dQ - Q d\psi$ 1 (3)

$= TdS - Q\, d\psi$ 1

dus bij constante ψ geldt $d(U - \psi Q) = TdS = dQ_{rev}$ 5