Hertentamen **Statistische Fysica**, vrijdag 5 januari 2018, 13.30h-16.30h, bestaande uit 4 opgaven. Begin bij elke opgave op een **nieuw** vel papier met daarop uw naam. De opgaven bestaan bij elkaar uit 20 deelvragen, met elke deelvraag zijn 5 punten te verdienen. Besteed aandacht aan alle onderdelen en schrijf met zwarte of blauwe pen. Aantekeningen en electronische hulpmiddelen zijn *niet* toegestaan. Succes!

In dit tentamen wordt de absolute temperatuur aangeduid met T, de constante van Boltzmann met $k_B = 1.38\times10^{-23}\text{J/K}$, en $\beta = 1/(k_BT)$. De protonmassa is 1.67×10^{-27}kg, het getal van Avogadro is $N_A = 6\times10^{23}$ mol^{-1}, de gas constante is $R = 8.31$ Jmol^{-1}K^{-1}, en 1 atm druk is in zeer goede benadering gelijk aan 10^5Pa.

Opgave 1 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
We beschouwen een systeem van 8 deeltjes, waarbij elk deeltje ófwel in de grondtoestand zit met energie 0, ófwel in de aangeslagen toestand met energie $\epsilon > 0$.

(a) Hoeveel microtoestanden heeft het systeem als gegeven is dat de totale energie gelijk is aan 3ϵ?

(b) Bereken de temperature T waarop de *gemiddelde* energie per deeltje gelijk is aan $\epsilon/10$.

Beschouw nu een deeltje met positie $x(t)$ op tijdstip t. Het deeltje beweegt op een één-dimensionaal rooster door na elke seconde ofwel een positie naar links te springen ($x \to x-1$) ofwel een positie naar rechts ($x \to x+1$), beide met 50% waarschijnlijkheid. Het deeltje begint in de oorsprong, dus $x(0) = 0$, en na t seconden zit het deeltje op positie $x(t)$.

(c) Bereken het aantal paden $\Omega(x,t)$ dat na t seconden tot een positie $x \in \{-t, -t+2, ..., t-2, t\}$ leidt. Hint: beschouw het aantal stappen naar links en rechts, t_L en t_R, met $t = t_L + t_R$ en $x = t_R - t_L$.

(d) Bereken, of geef op basis van fysische argumenten en/of analogieën, voor grote t de gemiddelde positie $\langle x\rangle(t)$ en de standaard deviatie $\sigma_x(t)$ van de positie van het deeltje.

Een stochastische variabele y voldoet aan de kansverdeling $p(y) = 1 - |y|$ voor $y \in [-1, 1]$ en $p(y) = 0$ voor $|y| > 1$.

(e) Bereken de standaard deviatie σ_y van y.

Opgave 2 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
Beschouw een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes in een volume V op temperatuur T. De interne energie van dit gas wordt gegeven door $U = \frac{3}{2}Nk_BT$.

(a) Geef een uitdrukkig voor de door het gas opgenomen hoeveelheid warmte Q tijdens een reversibele isotherme uitzetting van het beginvolume V tot een eindvolume $2V$. Is Q positief of negatief?

(b) Bereken de arbeid W die het gas met begintemperatuur T verricht tijdens een reversibele adiabatische volumeverandering van V naar $2V$. Is W positief of negatief?

(c) Het aantal microtoestanden van het gas verandert niet tijdens het proces van (b), terwijl het volume twee maal zo groot wordt. Leg in een paar woorden uit waarom deze bewering juist dan wel onjuist is.

(d) Een gasdeeltje met massa m heeft, op temperatuur T, een snelheid (v_x, v_y, v_z). Geef of bereken de goed-genormeerde kansverdeling $P(v_x, v_y, v_z)$ voor de snelheid.

Echte gassen bestaan niet uit puntdeeltjes maar uit deeltjes met eindige afmetingen, zeg bollen met een diameter d, die botsen als hun onderlinge afstand kleiner is dan d.

(e) Geef een afschatting voor de vrije weglengte λ voor een ijl gas van zulke bollen bij druk p en temperatuur T. Geef tevens de orde van grootte van d en λ in het geval van lucht (N_2) op kamertemperatuur en atmosferische druk.

—ZIE OMMEZIJDE —

Opgave 3 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.
De energie van een fotongas in een volume V met entropie S blijkt te worden gegeven door $U(S,V) = cS^{4/3}V^{-1/3}$ met $c > 0$ een bekend veronderstelde constante.

(a) Bereken de stralingsdruk p als functie van de temperatuur T van dit fotongas.

(b) Bereken de Helmholtz vrije energie $F(T,V)$ van dit fotongas.

We beschouwen nu een enkel deeltje in thermisch evenwicht met een warmtebad op temperatuur T. Het deeltje heeft 6 microtoestanden $s = 0,1,2,3,4,5$ met respectievelijk energieën $\epsilon_s = 0, \epsilon, \epsilon, 2\epsilon, 2\epsilon, 2\epsilon$, waarbij $\epsilon > 0$.

(c) Bereken de kanonieke partitiesom $Z(T)$ en de Helmholtz vrije energie $F(T)$ van dit deeltje.

(d) Bereken de kans P_0 om dit deeltje in microtoestand $s = 0$ aan te treffen, en tevens de kans W om dit deeltje met energie ϵ aan te treffen.

(e) Bereken de gemiddelde energie $u(T)$ van dit deeltje. Geef op basis van fysische argumenten (of bereken) (i) de hoge-T en (ii) de lage-T limiet van $u(T)$.

Opgave 4 —begin s.v.p. op een nieuw vel met daarop uw naam.

(a) Een stationair draaiende warmtemachine onttrekt warmte aan een bad en levert per cyclus 1 kJ aan arbeid, terwijl 4 kJ aan restwarmte wordt gedumpt in de tropische buitenlucht op een temperatuur van 27°C. Bereken de temperatuur T die het warmtebad *minstens* moet hebben.

(b) Een gas op chemische potentiaal μ en temperatuur T is in contact met een oppervlak met plekken waarop adsorptie van gasmolekulen kan plaatsvinden, zodanig dat een plek ofwel onbezet is met energie nul, ofwel enkelvoudig bezet is met (gegeven) energie ϵ_1, ofwel tweevoudig bezet is met (gegeven) energie ϵ_2. Bereken (i) de groot-kanonieke partitiesom $\mathcal{Z}(\mu,T)$ van een adsorptieplek, (ii) de kans P_0 dat een adsorptieplek onbezet is, en (iii) het gemiddeld aantal geadsorbeerde deeltjes $\langle N\rangle(\mu,T)$ op een adsorptieplek.

(c) Geef een uitdrukking voor de kanonieke partitiesom $Z(N,V,T)$ van een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes van massa m met posities $\mathbf{r}_i$ en lineaire momenta $\mathbf{p}_i$ in een volume V op temperatuur T, met $i = 1,\cdots,N$. Bereken hieruit vervolgens de Helmholtz vrije energie $F(N,V,T)$ voor $N \gg 1$ en laat hieruit zien dat de interne energie gegeven wordt door $U = \frac{3}{2}Nk_BT$.

(d) De druk Π, de dichtheid (of concentratie) C, en de temperatuur t van een of ander systeem zijn, in geschikte eenheden de we niet nader beschouwen, aan elkaar gerelateerd door $\Pi = tC/(1-C) - C^2$. Bereken de (dimensieloze) kritieke temperatuur t_c en de (dimensieloze) kritieke concentratie C_c. Geef tevens aan, met korte motivatie, of u wel of niet verwacht dat de deeltjes van dit systeem elkaar aantrekken.

(e) Het ferromagnetische Ising model bestaat uit spinvariabelen $s_i = \pm 1$ op N roosterpunten $i = 1,\cdots,N$, met een energie $-Js_is_j$ tussen elk paar naburige spins i en j op het rooster met $J > 0$ een bekend veronderstelde koppelingconstante. Karakteriseer in een paar woorden en met argumentatie, voor het geval van een vierkant rooster in twee dimensies, de toestand van dit systeem voor (i) $k_BT \gg J$ en (ii) $k_BT \ll J$.

— EINDE —