IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–Eskwadraat.
HET COLLEGE NS-201B WERD IN 2006/2007 GEGEVEN DOOR A.F.M. ARTS.

Thermische fysica 1 (NS-201b)
31 januari 2007

Net als in het boek en in het college wordt in dit tentamen met T de absolute temperatuur bedoeld (in Kelvin), en met $\tau = k_B T$ de fundamentele temperatuur (in Joule). Hier is $k_B = 1.38 \times 10^{-23} J/K$ de constante van Boltzmann. Ook noemen we de thermodynamische entropie S (in Joule/Kelvin), en de diminsieloze entropie is $\sigma = S/k_B$.
U mag uw eigen voorkeur (per vraag) aanpassen.
Schrijf duidelijk s.v.p. en beargumenteer uw antwoorden kort en bondig. Zorg er tevens voor dat uw naam staat op elke ingeleverde pagina.

Opgave 1

(32 punten)

We beschouwen een ysteem van N identieke deeltjes op vaste posities in een regelmatig rooster. Elk deeltje kan in 2 toestanden zitten, ofwel in de grondtoestand met energie 0, ofwel in de aangeslagen toestand met energie $\epsilon > 0$. er zijn geen onderlinge wisselwerking tussen de deeltjes, en $N \gg 1$.

a) Geef een fysisch voorbeeld van een systeem dat door dit model beschreven wordt.

b) Wat is het totaal aantal microtoestanden van dit systeem? We nemen nu aan dat het systeem thermisch geisoleerd is, met een gegeven energie $U = n\epsilon$. Hier is n het aantal deeltjes in de aangeslagen toestand.

c) Bereken de multipliciteit $g(N, n)$ in termen van n en N.

d) Gebruik de Stirlingbenadering om de entropie $\sigma(N, n)$ uit te rekenen. De thermische isolatie wordt nu verwijderd, en het systeem wordt vervolgens in thermisch evenwicht gebracht met een warmtebad op temperatuur τ. het aantal deeltjes blijft onveranderd N.

e) Bereken de kanonieke 1-deeltjes partitiesom $Z_1(\tau)$.

f) Bereken de kans P_0 dat een gegeven deeltje zich in de grondtoestand bevindt, en ook de kans P_1 dat het deeltje zich in de aangeslagen toestand bevindt. Geef vervolgans aan of $P_0 + P_1$ aan de verwachte normering voldoet.

g) Bereken de gemiddelde energie u van een gegeven deeltje als functie van $\tau \in [0, \infty)$. Geef de hoge-τ en lage-τ limietwaarden aan van u, en bespreek kort de fysische (on)redelijk van de limietwaarden. We beschouwen nu het geval $\epsilon = 0$, maar de deeltjes wisselwerken wél met elkaar. De interactie vindt alleen plaats tussen buurdeeltjes op het rooster, en is zodanig dat twee naburige deeltjes in dezelfde 1-deeltjes toestand een energie $-J$ hebben, en een energie $+J$ indien ze in verschillende toestanden zitten. We nemen $J > 0$.

h) Beschrijf in een paar woorden de macroscopische toestand van het systeem voor (i) $\tau \gg J$ en (ii) $\tau \ll J$.

Opgave 2

(28 punten)

We beschouwen een klassiek ideaal gas van N puntdeeltjes. het gas wordt langzaam (reversibel) geëxpandeerd van het begin-volume V_0 naar het eindvolume $V_1 = 3V_0$. De begintemperatuur T_0 is bekend, en dus ook de beginenergie $E_0 = 3Nk_BT_0/2$. De (nog onbekende) eindenergie noemen we E_1.

a) Geef de druk p_0 in de begintoestand.

b) Relateer met behulp van de Eerste Hoofdwet de energieverandering van het gas $\Delta E = E_1 - E_0$ aan de toegevoerde warmte q en de door het gas geleverde arbeid w.

c) Bereken q, w, en E_1 voor het geval dat de expansie isotherm verloopt.

d) Bereken alleen w voor het geval dat de expansie bij constante druk verloopt.

e) Bereken q, w, en E_1 voor het geval dat de expansie adiabatisch verloopt.

f) Indien de expansie naar de nieuwe toestand irreversibel i.p.v. reversibel geweest zou zijn, zou dan de toegevoerde warmte groter of kleiner zijn geweest, of even groot?

Opgave 3 *(12 punten)*

Een of ander afgesloten thermodynamisch systeem wordt beschreven door de fundamentele relatie $E(S,V) = cS^{4/3}/V^{1/3}$, met E de energie, S de entropie, en V het volume van het systeem, en c een constante. [Deze relatie geldt voor een fotongas, maar dat doet niet ter zake.] het aantal deeltjes wordt niet nader beschouwd hier, maar kan als vast worden verondersteld.

a) Laat zien dat de temperatuur T van dit systeem gegeven wordt door

$$T(S,V) = \frac{4c}{3}\frac{S^{1/3}}{V^{1/3}} \tag{1}$$

b) Is E extensief, intensief, of geen van beide? En T? Beargumenteer of bereken uw antwoord.

c) We wensen het systeem nu te beschrijven in termen van V en T. Geef de bijbehorende legendre transformatie van $E(,SV)$ naar $F(T,V)$, en bereken $F(T,V)$.

Opgave 4 *(16 punten)*

We beschouwen een enkel klassiek puntdeeltje met massa m in een twee-dimensionaal vierkant vlak met een oppervlakte $A = L \times L$. De positie van het deeltje is (x,y), de impuls is (p_x, p_y), en de energie is $E = \left(p_x^2 + p_y^2\right)/(2m)$. De Randen van het vierkante oppervlak worden op een vaste temperatuur τ gehouden, zodat de partitiesom van dit ene deeltje gegeven wordt door

$$Z_1 = \frac{1}{h^2}\int dx \int dy \int dp_x \int dp_y \exp(-E/\tau) \tag{2}$$

met h de constante van Planck

a) Geef de integratie grenzen van alle vier de variabelen in de formule hierboven, en bereken vervolgens Z_1.

b) Wat is de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ van dit deeltje?

c) Bereken het gemiddelde van de door het deeltje uitgeoefende kracht per eenheid lengte op de wand, d.w.z. het twee-dimensionale analogon van de druk.

d) In de linherhelft van het vierhant wordt nu een constant electrisch veld aangelegd, zodanig dat het deeltje een potentiële energie $\epsilon > 0$ heeft wanneer het in de linkerhelft zit. In de rechterhelft zit geen veld. Geef, voor het geval dat de linker- en rechterhelft precies even groot zijn, de kans om het deeltje in de linkerhelft aan te treffen.

Opgave 5 *(12 punten)*

Een bolvormig colloïdaal deeltje met een straal $a = 1\mu m$ bevindt zich in een niet-stromend oplosmiddel bij kamer temperatuur, en voert dus een Brownse beweging uit (waarbij het effect van gravitatie kan worden verwaarloosd). Een waarnemer met een video-microscoop registreert elke seconde de hoogte X van het deeltje, en verkrijgt zo de dataset X_0, X_1, X_2, X_3, $\ldots$, X_N, waarbij X_0 de begin-hoogte is en X_n de hoogte na n seconden. De waarnemer stopt na 10 uur meten, dus $N = 36000$.

a) Hoe waarschijnlijk acht u het dat $X_N = Na$? Motiveer uw antwoord.

b) Uit analyse van de set blijkt dat het gemiddelde $\langle (X_{n+t} - X_n)^2 \rangle = \alpha a^2 t$ met $\alpha = 0.1$, waarbij wordt gemiddeld over de hele data set $n = 0, \ldots, N - t$ voor $t = 1, 2, 3, \ldots$. Bereken de diffusie coefficient D van dit deeltje (uiteraard met eenheid).

c) Hoe lang duurt het, gemiddeld, voor dit deeltje om zich te verplaatsen over een hoogteverschil van vier maal zijn eigen straal?