Kwantummechanica 2018-2019 Voorbeeld Deeltoets A

Bij deze toets mag het verstrekte formuleblad worden gebruikt. Een grafische calculator is toegestaan, tenzij deze signalen kan verzenden of ontvangen. De reguliere tijd voor de toets is 90 minuten. Antwoorden op het verstrekte antwoordblad, dit i.v.m. scannen niet vouwen, kreuken of scheuren. Vermeld steeds uw NAAM en STUDENTNUMMER. Onduidelijke of onleesbare antwoorden worden fout gerekend. Studenten die recht hebben op extra tijd (30 minuten): Dit graag kenbaar maken aan de assistenten, en plaatsnemen op de aangegeven plaatsen. Deze toets heeft 11 vragen, voor een totaal van 100 punten. Vergeet niet, waar van toepassing, de (SI) eenheden van uw antwoord te vermelden!

1 Welke toestand ?

We beschouwen een oneinding diepe potentiaalput

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & anders \end{cases} \tag{1}$$

De grondtoestand noemen we Ψ_1 en de eerste aangeslagen toestand is Ψ_2. We installeren een detector die de positie meet, en die 3 mogelijke uitkomsten kent:

$$A \quad : \quad x < a/3 \tag{2}$$
$$B \quad : \quad a/3 < x < 2a/3 \tag{3}$$
$$C \quad : \quad x > 2a/3 \tag{4}$$

Een bron plaatst bij elke druk op de knop een nieuw deeltje in de put. Vervolgens voeren we een meting uit, waarna het deeltje verwijderd wordt. We herhalen deze procedure 5 maal en krijgen de uitkomst: $BBCBA$.

1. (10 points) Vul de tabel met (op 1 decimaal afgeronde) kansen bij op elke uitkomst bij een enkele meting aan

	p_A	p_B	p_C
Ψ_1	0.2	.	.
Ψ_2	.	0.2	.

(5)

2. (10 points) Wat is de kans op de bovenstaande meetreeks als de bron alleen deeltjes in Ψ_1 produceert?
3. (10 points) Wat is de kans op de bovenstaande meetreeks als de bron alleen deeltjes in Ψ_2 produceert?
4. (10 points) Pierre doet dit experiment, maar hij is vergeten welke bron hij precies geplaatst heeft, het zou net zo goed Ψ_1 als Ψ_2 kunnen zijn. Wat kan Maria hem na deze meetreeks over de bron vertellen ?

2 Harmonische Oscillator in een Veld (13 Pt)

Beschouw het probleem van een deeltje met lading q, dat zich in een harmonische potentiaal en in een elektrisch veld $\mathcal{E}$ bevindt. De complete Hamiltoniaan is

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x) + \hat{H}_{\mathcal{E}} \\ \hat{V}(x) &= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \\ \hat{H}_{\mathcal{E}} &= q\mathcal{E}x \, . \end{aligned}$$

We bepalen eerst de eigentoestanden van de Hamiltoniaan voor $\mathcal{E} = 0$.

5. (5 points) Laat zien dat de transformatie van variabelen $y = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ de Hamiltoniaan in de volgende vorm brengt:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} y^2 \right) \, . \tag{6}$$

In deze vorm krijgen de ladderoperatoren de vorm (gegeven):

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + \frac{d}{dy}\right) \ , \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{d}{dy}\right) \ .$$

(NB in de notatie van Griffiths: $\hat{a} \equiv \hat{a}^-$) Het is gegeven dat $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ en $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

6. (10 points) Druk y en d/dy en de Hamiltoniaan uit in termen van de ladderoperatoren.
7. (10 points) Gebruik de eigenschappen van de ladderoperatoren om de ongestoorde $\mathcal{E} = 0$ energie-eigenwaarden te bepalen. Laat hierbij zien welke waarde van n de grondtoestand voorstelt.
8. (10 points) Laat zien dat voor $\mathcal{E} \neq 0$ de Hamiltoniaan door een geschilkte transformatie van variabelen op de volgende vorm te brengen is (bepaal hierbij E_0):

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2}y^2\right) + E_0 \ . \tag{7}$$

9. (5 points) Bepaal de energie eigenwaarden voor $\mathcal{E} \neq 0$.

3 Eigenstate

We beschouwen een ondiepe potentiaalput die een enkele gebonden toestand heeft.

10. (10 points) Schets deze gebonden toestand en geef grafisch aan wat de kans is het quantum in het klassiek verboden gebied aan te treffen.
11. (10 points) Hoe kunnen we deze kans groter maken? Hoe groot kan deze maximaal worden?