Algemene opmerkingen

Als je een orthonormale basis $\{|n\rangle\}$ van toestanden hebt voor je Hilbertruimte dan is elke operator $\hat{Q}$ te schrijven als $\hat{Q} = \sum_{m,n} |m\rangle Q_{mn} \langle n|$, waarbij $Q_{mn} = \langle m|\hat{Q}|n\rangle$. Een manier om dit te zien is door de volledigheidsrelatie in te vullen:

$$\hat{Q} = \Big(\sum_m |m\rangle\langle m|\Big)\hat{Q}\Big(\sum_n |n\rangle\langle n|\Big) = \sum_{m,n} |m\rangle\langle m|\hat{Q}|n\rangle\langle n| = \sum_{m,n} |m\rangle Q_{mn}\langle n|. \tag{1}$$

Kijk nogmaals naar hoofdstuk 3.6 van Griffiths en opgave set G als dit niet duidelijk is.

Foucault en Dirac

De 1-dimensionale harmonische oscillator is een kwantummechanisch model voor een slinger. We beschouwen dit systeem in de Dirac notatie. We beschouwen een 1-dimensionale harmonische oscillator met eigentoestanden $|j\rangle$, en hoekfrequentie ω

1. Schrijf de Hamiltonoperator als een som over alle eigentoestanden.

$$\hat{H} = \sum_j |j\rangle E_j \langle j| \tag{2}$$

waarbij $E_j = \hbar\omega(\frac{1}{2} + j)$. De basis $\{|j\rangle\}$ bestaat uit eigentoestanden van H, dus H is diagonaal, en de eigenwaarden zijn de energieen van de harmonische oscillator.

2. Schrijf de ladderoperatoren $\hat{a}$ en $\hat{a}^+$ als sommaties over de energie-eigentoestanden in de Dirac notatie.

We weten dat $\hat{a}|j\rangle = \sqrt{j}|j-1\rangle$ en $\hat{a}^+|j\rangle = \sqrt{j+1}|j+1\rangle$, dus:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \textstyle\sum_j \sqrt{j}|j-1\rangle\langle j| \\ \hat{a}^+ &= \textstyle\sum_j \sqrt{j+1}|j+1\rangle\langle j|. \end{aligned}$$

Je kunt deze uitdrukkingen afleiden door de volledigheidsrelatie in te vullen, bijvoorbeeld: $\hat{a} = \sum_j \hat{a}|j\rangle\langle j| = \sum_j \sqrt{j}|j-1\rangle\langle j|$

Ladders en bolsymmetrie

Ladderoperatoren zijn zeer nuttig bij het beschouwen van toestanden met impulsmoment in potentialen met sferische symmetrie. We beschouwen toestanden $|l, m\rangle$ met impulsmoment l en magnetisch kwantumgetal (projectie van het impulsmoment) m.

3. Laat zien, op basis van de commutatieregels van $\hat{\mathbf{L}}$ en $\hat{\mathbf{L}}^2$, dat $\hat{L}_+$ met $\hat{\mathbf{L}}^2$ commuteert.

De commutatieregel is $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0$, dus $[\hat{L}_x, \mathbf{L}^2] = [\hat{L}_y, \mathbf{L}^2] = [\hat{L}_z, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0$. Belangrijk: $\hat{\mathbf{L}}$ is een vector, niet de som van $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ en $\hat{L}_z$. Vervolgens kunnen we de commutatieregel van $\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$ met $\hat{\mathbf{L}}^2$ bepalen:

$$[\hat{L}_+, \hat{\mathbf{L}}^2] = [\hat{L}_x + i\hat{L}_y, \hat{\mathbf{L}}^2] = [\hat{L}_x, \hat{\mathbf{L}}^2] + i[\hat{L}_y, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0 + i0 = 0$$

, dus ze commuteren.

Algemene tip voor opgaven over commutatierelaties: als er op een toets wordt gevraagd om een bepaalde commutatierelatie te bewijzen/uit te rekenen dan is het meestal in een paar regels te doen. Als je meer dan vijf regels nodig hebt denk dan na over of je andere commutatierelaties die je al kent kan gebruiken. Dit vermindert ook de kans op rekenfouten.

4. Gegeven is dat $\hat{L}_+|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1\rangle$. Schrijf de operator $\hat{L}_+$ in Dirac notatie.

$$\hat{L}_+ = \sum_{l,m} \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1\rangle\langle l, m|$$

Het was voldoende om dit op te schrijven. Als je het niet meteen zag kon je het afleiden door de volledigheidsrelatie te gebruiken:

$$\hat{L}_+ = \sum_{l,m} \hat{L}_+|l, m\rangle\langle l, m| = \sum_{l,m} \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1\rangle\langle l, m|$$

5. Bereken $(\hat{L}_+)^\dagger$

Er zijn twee manieren om dit te interpreteren. Beide werden goed geteld.
Optie 1: $(\hat{L}_+)^\dagger = (\hat{L}_x + i\hat{L}_x)^\dagger = \hat{L}_x^\dagger - i\hat{L}_y^\dagger = \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hat{L}_-$.
Optie 2: $(\hat{L}_+)^\dagger = (\sum_{l,m} \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1\rangle\langle l, m|)^\dagger$
$= \sum_{l,m} \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m\rangle\langle l, m+1|$

Impulsmoment en matrices

Bwschouw de volgende vorm van de impulsmoment-operator voor een systeem met $l = 1$.

$$\hat{L}_z = \hbar \sum_{m=-1,0,1} |m\rangle m \angle m| \tag{3}$$

6. Voor een zeker systeem is de Hamiltonperator $\hat{H} = \beta \hat{L}_z$, met β een reele constante. De toestand van het systeem op $t = 0$ is $|\Psi(0)\rangle$. Laat zien dat $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$, met $\hat{U}(t) = \sum_{m=-1,0,1} |m\rangle e^{-i\beta mt}\langle m|$, aan de tijdsafhankelijke Schrodingervergelijking voldoet.

Je moest hier de $|\Psi(t)\rangle$ invullen in de tijdsafhankelijke Schrodingervergelijking: $\hat{E}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$. Eerst de linkerkant:
$\hat{E}|\Psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=-1,0,1} |m\rangle e^{-i\beta mt}\langle m|\Psi(0)\rangle = \sum_{m=-1,0,1} |m\rangle \hbar\beta m e^{-i\beta mt}\langle m|\Psi(0)\rangle$
En vervolgens de rechterkant:
$\hat{H}|\Psi(t)\rangle = \beta\hbar\Big(\sum_{m=-1,0,1} |m\rangle m\langle m|\Big)\Big(\sum_{n=-1,0,1} |n\rangle e^{-i\beta nt}\langle n|\Psi(0)\rangle\Big)$
$= \sum_{m,n=-1,0,1} |m\rangle \beta\hbar m\delta_{m,n} e^{-i\beta nt}\langle n|\Psi(0)\rangle = \sum_{m=-1,0,1} |m\rangle \beta\hbar m e^{-i\beta mt}\langle m|\Psi(0)\rangle$
De twee uitdrukkingen zijn gelijk, dus $|\Psi(t)\rangle$ is een oplossing van de Schrodingervergelijking.
Verdere opmerkingen:

- **Gebruik een dummy index/variabele nooit meerdere keren in de zelfde uitdrukking.** Bij het invullen van $\hat{H}\hat{U}|\Psi(0)\rangle$ deden veel mensen dit:
  Fout: $\hat{H}\hat{U} = \hbar\sum_m |m\rangle m\langle m| \sum m \sum_m |m\rangle e^{-i\beta mt}\langle m|$, en dan zeggen dat $\langle m|m\rangle = 1$
  Goed: $\hat{H}\hat{U} = \hbar\sum_m |m\rangle m\langle m| \sum_n |n\rangle e^{-i\beta nt}\langle n| = \hbar\sum_{n,m} |m\rangle m\delta_{n,m} e^{-i\beta nt}\langle n| = \sum_m |m\rangle m e^{-i\beta mt}\langle m|$