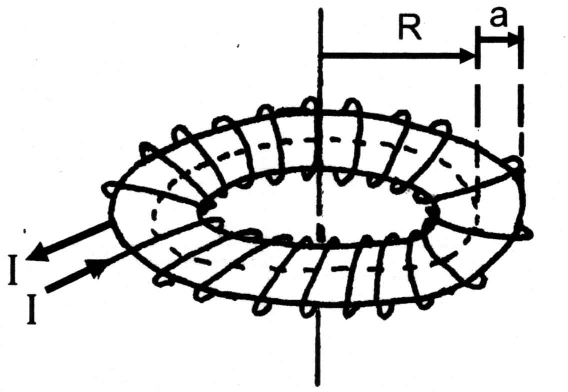
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-B251 werd in 2008/2009 gegeven door .

Elektrodynamica 2 (NS-B251)
26 juni 2009

Opgave 1.

(35 punt)

Een glazen ring is omwikkeld met een spoel met N windingen. De windingen van de spoel sluiten zeer nauw op elkaar aan (veel nauwer dan in de figuur). De hartlijn van de spoel heeft een straal R. De doorsnede van de ring loodrecht op de hartlijn is een cirkel met straal a. Door de spoel loopt een stroom I. De glazen ring is hol van binnen en kan worden gevuld met verschillende materialen. De wand van de ring is zo dun dat de magnetische eigenschappen van de ring verwaarloosd mogen worden. Binnenin de ring heerst aanvankelijk vacuüm.



a) Geef de symmetrie eigenschappen van deze stroomverdeling en bepaal hieruit de richting van het $\vec{B}$-veld op de hartlijn. Is het $\vec{B}$-veld overal binnenin de spoel identiek? *(9 punt)*

De ring wordt nu gevuld met een paramagnetisch materiall met een magnetische susceptibiliteit $\chi_m^p (> 0)$.

b) Bepaal naar richting en grootte het $\vec{H}$-veld op de hartlijn. Bereken hieruit het $\vec{B}$-veld. *(7 punt)*

c) Bereken de magnetisatie $\vec{M}$ op de hartlijn van de spoel. Schets het verband tussen de magnetisatie en de stroomsterkte. Laat ook zien wat er gebeurt bij grote stroomsterkte, wanneer het verwand niet meer lineair verondersteld mag worden. *(7 punt)*

Het paramagnetisch materiaal wordt nu uit de buis verwijderd. De buis wordt gevuld met diamagnetisch materiaal met een magnetische susceptibiliteit $\chi_m^d (< 0)$.

d) Bepaal opnieuw de magnetisatie $\vec{M}$ op de hartlijn en schets het verband tussen de magnetisatie en de stroomsterkte. *(5 punt)*

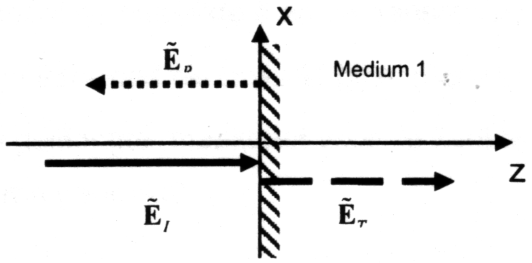
Het diamagnetische materiaal wordt nu uit de buis verwijderd en de buis wordt gevuld met een ferromagnetisch materiaal. De verzadigingsmagnetisatie wordt gegeven door $\vec{M}_s$.

e) Schets het verband tussen de magnetisatie en de stroomsterkte. Bereken voor grote stroomsterkte het $\vec{B}$-veld op de hartlijn, waarbij het ferromagnetische materiaal verzadigd is. *(7 punt)*

Opgave 2

(40 punt)

Een vlakke monochromatisch elektromagnetische golf in vacuüm ($\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{I}}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0,I}} e^{i(k_I)\cdot z - \omega t}$; $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{I}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}(\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{I}} \times \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{I}})$) valt loodrecht op het oppervlak ($z = 0$) van medium 1 (zie tekening). Het medium is een lineaire homogene Ohmse geleider ($\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$). We geven de permittiviteit, permeabiliteit, lichtsnelheid en brekingsindes van medium 1 aan met ϵ_1, $\mu_1(=\mu_0)$, v_1, n_1. $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$ en $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$.



De Maxwell vergelijkingen in medium 1 kunnen geschreven worden als:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_1} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4}$$

Wij verwaarlozen in deze opgave ρ_f.

a) Bepaal de golfvergelijkingen voor de **E** en **B** velden in medium 1 (hint: neem de rotatie van vergelijking 3 en 4). Laat verder zien dat de vlakke gloven

$$\tilde{\mathbf{E}}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}} e^{-\kappa z} e^{i(k_I)\cdot z - \omega t}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z,t) = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{0}} e^{-\kappa z} e^{i(k_I)\cdot z - \omega t} \tag{5}$$

met

$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_0}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_1 \omega}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_0}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_1 \omega}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

oplossingen zijn van de golfvergelijkingen voor de **E** en **B** velden. *(6 punt)*

b) Bepaal de huiddikte (skin depth), $d = 1/\kappa$, wanneer medium 1 een goede geleider is $\left(\frac{\sigma}{\epsilon_1 \omega}\right) >> 1$ en wanneer het een slechte geleider is $\left(\frac{\sigma}{\epsilon_1 \omega}\right) << 1$. *(6 punt)*

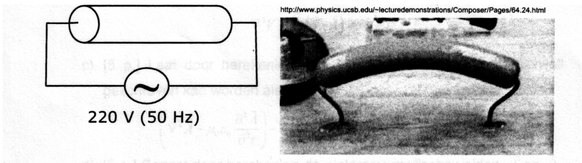
c) Bepaal de gereflecteerde golf (hint: vergeet de fasesprong van π voor $n_1 > n_0$ niet). *(6 punt)*

d) Bepaal de reflectiecoëfficiënt $R(= I_R/I_I)$. *(6 punt)*

Een magnetron oven wrkt bij een frequentie van 2,45 GHz. Bij deze frequentie heeft een dikke worst (bij benadering een cilinder met een diameter van 2 cm en een lengte van 20 cm, zie figuur) $\epsilon_1/\epsilon_0 \approx 50$ en $\sigma \approx 2\Omega^{-1}m^{-1}$.

e) Bepaal de huiddikte d en de transmissie T voor de worst. *(6 punt)*

f) Een infrarood oven werkt bij een gloflengte van 1 mm en $\sigma \approx 2\Omega^{-1}m^{-1}$ ook bij deze golflengte, maakt het voor de kooktijd uit of jeen infrarood oven of een magnetron gebruikt? *(3 punt)*



Een alternatief voor de twee bovengenoemde kookmanieren is gebruik te maken van de Ohmse weerstand van de worst (resistive heating). We sluiten de uiteinden van de worst aan op 220 V AC spanningsbron (zie figuur). De stroom is 0,6 A.

g) Bepaal het geleidingsvermogen van de worst (σ in $\Omega^{-1}m^{-1}$). *(3 punt)*

h) Bepaal, bij benadering, de kooktijd voor de drie kookmanieren als we gebruik maken van een magnetron (650 W) een infrarood oven (1500 W) of bovengenoemde simpele “twee draden in het stopcontact” methode. Het soortelijk gewicht van de worst is $1200 kg/m^3$ en de warmtecapaciteit is $4200 J/(KKg)$ en de gewenste eindtemperatuur is $80°C$ (begintemperatuur $5°C$). *(4 punt)*

Opgave 3

(25 punt) De meetbare elektromagnetische velden, $\vec{E}$ en $\vec{B}$, kunnen in termen van het scalaire veld, V, en de vectorpotentiaal, $\vec{A}$, uitgedrukt worden als

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{7}$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{8}$$

a) Laat door berekening zien dat het magneetveld, $\vec{B}$, als uitgedrukt in 7 voldoet aan de Maxwell vergelijking $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. *(5 punt)*

b) Laat door berekening zien dat de wet van Gauss uitgedrukt in V en $\vec{A}$ geschreven kan worden als

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{9}$$

c) *(5 punt)* Laat door berekening zien, dat de wet van Ampère-Maxwell geschreven kan worden als

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{J} \tag{10}$$

(5 punt)

d) Bepaal door berekening de elektromagnetische velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$, voor

$$V = 0, \quad \vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{z}}, & |x| < ct, \\ 0 & |x| > ct \end{cases} \tag{11}$$

(5 punt)

e) Is de bovengenoemde vector potentiaal, $\vec{A}$, in de Coulomb ijk ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$) of in de Lorentz ijk ($\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$)? *(5 punt)*