Tentamen NS-251B Elektrodynamica 2, 25 augustus 2010

Duur: 3 uur

Open-boektentamen: nee

Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

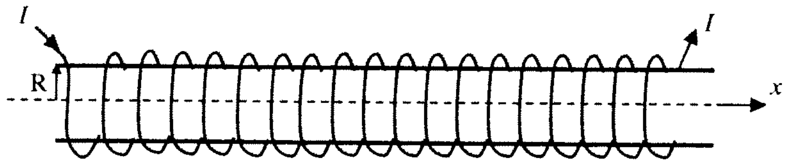
Gebruik van rekenmachine toegestaan

Normering zoals aangegeven in de opgaven

Opgaven 1 en 2 s.v.p. op aparte vellen maken en ieder vel voorzien van naam

Opgave 1

Om een oneindig lange, massieve cilinder met straal R is een spoel gewonden (zie figuur). De cilinder is gemaakt van paramagnetisch materiaal van het type LIH met magnetische susceptibiliteit χ_m. De as van de cilinder valt samen met de x-as. De windingsdichtheid van de spoel wordt gegeven door n en is zeer groot. Door de spoel loopt een stroom I. In deze opgave mogen de magnetische eigenschappen van de draden van de spoel worden verwaarloosd.



a) [10 punten] Gebruik symmetrie om de richting van het $\vec{H}$-veld binnen en buiten de spoel te bepalen. Bepaal de grootte van het $\vec{H}$-veld binnen en buiten de spoel als functie van de stroom I.

b) [6 punten] Bepaal het $\vec{B}$-veld overal in de ruimte naar richting en grootte.

c) [8 punten] Bepaal de magnetisatie $\vec{M}$ binnenin de cilinder. Bereken hiermee de gebonden stroomdichtheidsvektoren $\vec{J}_b$ en $\vec{K}_b$.

d) [6 punten] Hoe groot is de door de paramagnetische cilinder geleverde bijdrage aan het $\vec{B}$-veld in vergelijking met de bijdrage van de stroom I door de spoel? Kunt u het antwoord ook begrijpen uit de gebonden stromen en de stroom I?

De paramagnetisch cilinder wordt nu vervangen door een even grote, massieve ferromagnetische cilinder. De verzadigingsmagnetisatie van het ferromagnetische materiaal is M_s.

e) [6 punten] Bepaal opnieuw het $\vec{H}$-veld overal in de ruimte naar richting en grootte.

f) [8 punten] De stroom door de spoel wordt nu opgevoerd totdat het ferromagnetische materiaal volledig verzadigd is. Bepaal het $\vec{B}$-veld overal in de ruimte naar richting en grootte.

g) [6 punten] Hoe groot is de door de ferromagnetische cilinder geleverde bijdrage aan het $\vec{B}$-veld in vergelijking met de bijdrage van de stroom I door de spoel?

Opgave 2

We bekijken in deze opgave de voortplanting van electromagnetische golven in een lineair medium, waarbij er geen vrije ladingen noch vrije stromen aanwezig zijn. De permittiviteit van het medium geven we aan met ε, de permeabiliteit met μ.

a) [10 punten] Laat zien dat, uitgaande van de Maxwell vergelijkingen in algemene vorm, in het bovenbeschreven medium de $\vec{E}$- en $\vec{B}$-velden aan de volgende vergelijkingen moeten voldoen:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\vec{0};\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\vec{0};\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

b) [10 punten] Laat zien dat het $\vec{E}$-veld en het $\vec{B}$-veld beiden aan de golfvergelijking voldoen.

c) [4 punten] Hoe groot is de voortplantingssnelheid v van een electromagnetische golf in dit medium?

Uit bovenstaande vergelijkingen volgt dat electromagnetische golven transversaal zijn en dat het $\vec{E}$-veld loodrecht op het $\vec{B}$-veld staat. Een monochromatische vlakke golf die zich voortplant in de z-richting wordt gegeven door:

$$\vec{E}=E_0\cos(kz-\omega t+\delta)\hat{x};\quad \vec{B}=\frac{E_0}{v}\cos(kz-\omega t+\delta)\hat{y}$$

d) [6 punten] Bepaal de energiedichtheid van deze golf.

e) [6 punten] Bereken de Poynting vektor $\vec{S}$ van deze golf.

f) [6 punten] Bereken de impulsdichtheid behorende bij deze golf.

g) [8 punten] Wanneer de golf vanuit het bovenbeschreven medium op een ander lineair medium met permittiviteit ε' en permeabiliteit μ' valt, dan geeft dat aanleiding tot een gereflecteerde golf en een doorgelaten golf. Geef de electrodynamische randvoorwaarden waaraan de $\vec{E}$- en $\vec{B}$- velden van de golven moeten voldoen.

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTIT

Triple Products

(1) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(7) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla\times(\nabla f) = 0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEORE

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}(\nabla f)\cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int(\nabla\cdot\mathbf{A})\,d\tau = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$