Tentamen NS-251B Electrodynamica, 2 juli 2010

Duur: 3 uur

Open-boek tentamen: nee

Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

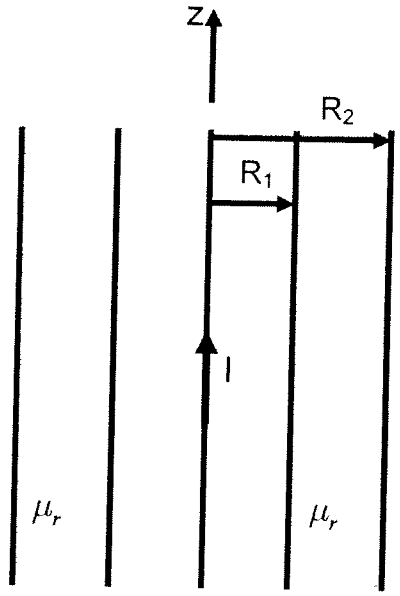
Gebruik van rekenmachine toegestaan

Normering zoals aangegeven in de opgaven

Opgaven 1, 2 en 3 s.v.p. op aparte vellen maken en ieder vel voorzien van naam

Opgave 1

Door een oneindig lange, zeer dunne, rechte stroomdraad loopt een constante stroom I. De stroomdraad is omgeven door een paramagnetische cilinder van het type LIH met relatieve permeabiliteit μ_r. De binnenstraal van de cilinder is R_1, de buitenstraal R_2. De centrale as van de cilinder valt samen met de stroomdraad. Afgezien van de stroomdraad heerst binnenin de cilinder vacuüm ($r<R_1$), evenals buiten de cilinder ($r>R_2$). We kiezen de z-as langs de stroomdraad. In de figuur is een lengtedoorsnede van een stuk van de cilinder weergegeven.



a) [7 punten] Bepaal het $\vec{H}$-veld overal in de ruimte naar richting en grootte.

b) [7 punten] Bepaal het $\vec{B}$-veld overal in de ruimte. Bepaal tevens de magnetisatie $\vec{M}$ van de paramagnetische cilinder.

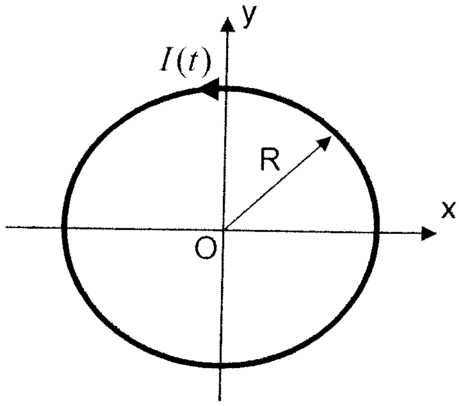
c) [7 punten] Schets in één figuur de grootte van $\vec{H}$, $\vec{B}/\mu_0$ en $\vec{M}$. Wat is de relatie tussen deze drie velden?

d) [7 punten] Bereken de gebonden volumestroomdichtheid $\vec{J}_b$ en de gebonden oppervlaktestroomdichtheid $\vec{K}_b$.

e) [7 punten] De totale gebonden stroom moet gelijk aan 0 zijn. Kies een geschikt vlak en laat zien dat dit het geval is.

Opgave 2

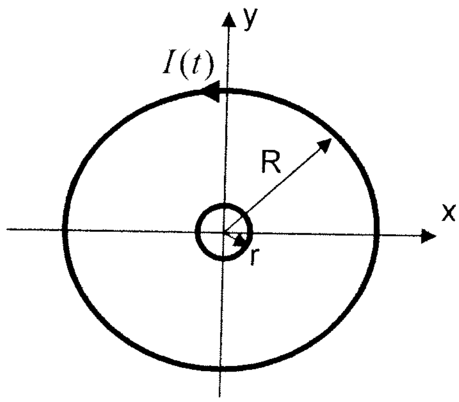
Door een metalen ring met straal R loopt een stroom $I(t)$, lineair in de tijd toenemend volgens $I(t)=\alpha t$ met α een positieve constante. De ring ligt in het xy-vlak, waarbij het midden van de ring samenvalt met de oorsprong O (zie figuur). De richting van de stroom is tegen de wijzers van de klok in. De z-as gaat door O, staat loodrecht op het vlak van tekening en is naar ons toegericht.



a) [4 punten] Bepaal met behulp van symmetrie de richting van het $\vec{B}$-veld in de oorsprong O.

b) [8 punten] Bereken met behulp van Biot-Savart het $\vec{B}$-veld in de oorsprong O.

In het midden van de grote ring wordt nu een veel kleinere ring geplaatst met straal r ($r \ll R$), zoals in onderstaande figuur. De middelpunten van kleine en grote ring vallen samen in O. De weerstand van de kleine ring is R_k.



c) [4 punten] In de kleine ring gaat een stroom lopen. In welke richting en waarom?

d) [8 punten] Bereken de grootte van de stroom in de kleine ring. De kleine ring is dusdanig klein dat overal binnen de ring de waarde van het $\vec{B}$-veld constant genomen kan worden en gelijk aan de waarde in de oorsprong.

De situatie wordt nu omgekeerd: de stroom $I(t)=\alpha t$ wordt niet door de grote maar door de kleine ring gestuurd (tegen de wijzers van de klok in).

e) [6 punten] Geef richting en grootte van de stroom door de grote ring. De weerstand van de grote ring is R_g.

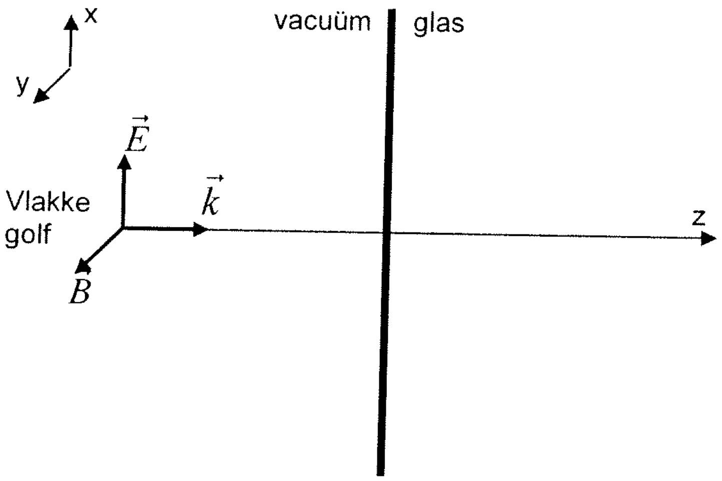
Opgave 3

Een elektromagnetische, monochromatische vlakke golf plant zich voort in vacuüm in de positieve z-richting. De golf heeft golfgetal k, hoekfrequentie ω, amplitude E_0 en is lineair gepolariseerd in de x-richting. De lichtsnelheid in vacuüm is c, de permittiviteit ε_0 en de permeabiliteit μ_0. De $\vec{E}$- en $\vec{B}$-velden van de golf worden gegeven door:

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x} \text{ en } \vec{B} = \frac{1}{c} E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{y}$$

a) [7 punten] Bereken de Poynting vektor $\vec{S}$ van deze vlakke golf. Wat stelt $\vec{S}$ voor?
b) [7 punten] Bereken de intensiteit I van deze vlakke golf en de gemiddelde impulsdichtheid $\langle \vec{p} \rangle$.

De vlakke golf nadert onder loodrechte inval een groot en vlak stuk glas met brekingsindex n en permeabiliteit $\mu = \mu_0$ (zie onderstaande figuur). We nemen aan dat het glas een lineair diëlectricum is.



De amplituden van de gereflecteerde golf $E_{0,R}$ en van de doorgelaten ("getransmitteerde") golf $E_{0,T}$ worden gegeven door:

$$E_{0,R} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right) E_0 \text{ en } E_{0,T} = \left(\frac{2}{1+n}\right) E_0$$

c) [7 punten] Bepaal de intensiteiten van de gereflecteerde en de doorgelaten golven. Bepaal hieruit de reflectiecoëfficiënt R en de transmissiecoëfficiënt T.
d) [7 punten] Hoe groot is de energiedichtheid van de golf in het glas?
e) [7 punten] Hoe groot is de stralingsdruk (gemiddelde kracht per eenheid van oppervlak) die door de invallende golf op het glas wordt uitgeoefend? Hierbij kunt U aannemen dat de doorgelaten golf uiteindelijk in het glas wordt geabsorbeerd.

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient :
$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence :
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl :
$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian :
$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient :
$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence :
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl :
$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian :
$$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient :
$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence :
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl :
$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian :
$$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$