Tussentoets NS-251B Electrodynamica, 20 april 2012

Duur: 3 uur

Open-boek tentamen: nee

Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

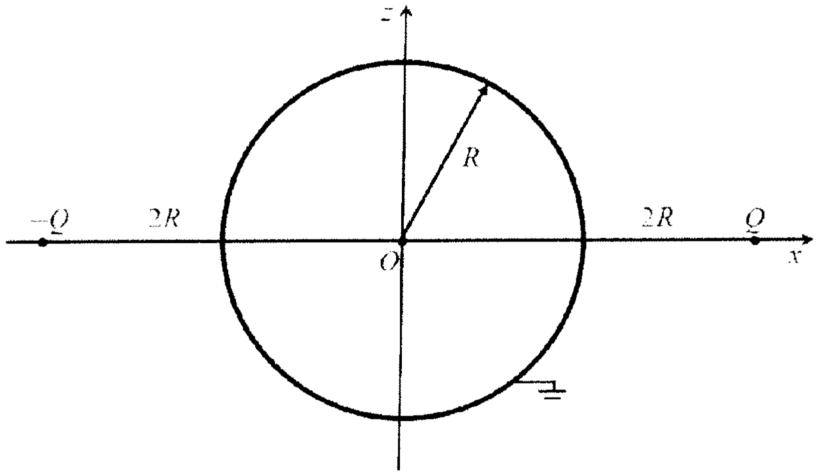
Gebruik van rekenmachine toegestaan

Normering zoals aangegeven in de opgaven

Opgaven 1, 2 en 3 s.v.p. op aparte vellen maken en ieder vel voorzien van naam

Opgave 1

Twee puntladingen Q en –Q (Q>0) bevinden zich in vacuüm aan weerszijden van een geaarde, geleidende bol met straal R. De afstand van de puntladingen tot het middelpunt van de bol is 2R. We kiezen het middelpunt van de bol als oorsprong O, de as door de beide puntladingen als x-as en de as loodrecht daarop en in het vlak van tekening als z-as (zie figuur).



a. [7 punten] Door welk systeem van 4 puntladingen kan het elektrische veld $\vec{E}$ buiten de bol worden bepaald?

b. [8 punten] Bepaal het $\vec{E}$-veld overal op de z-as naar richting en grootte.

c. [7 punten] Benader het $\vec{E}$-veld op de z-as voor grote waarden van z en laat zien dat het een dipoolveld wordt.

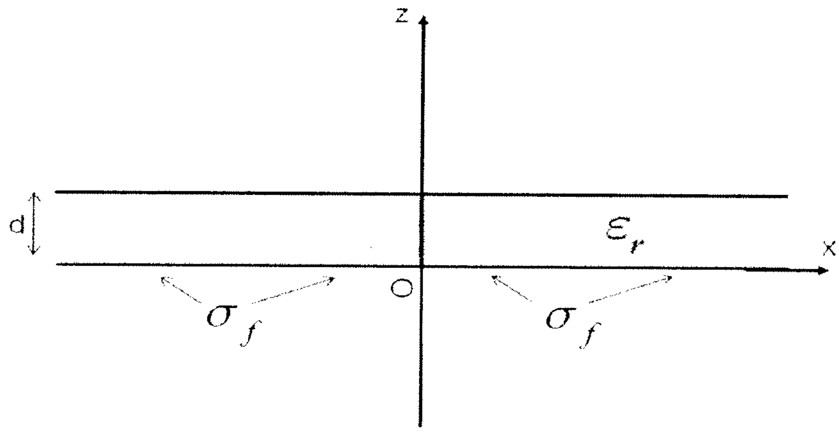
d. [8 punten] Bereken het dipoolmoment $\vec{p}$ van deze ladingsverdeling. Laat zien dat uw antwoord in overeenstemming is met het resultaat van onderdeel c).

De aarding van de bol wordt nu verwijderd en de bol wordt op potentiaal V gebracht.

e. [5 punten] Hoeveel lading zit er op de bol? Geef opnieuw, in benadering, het $\vec{E}$ veld op de z-as voor grote waarden van z.

Opgave 2

Een oneindig grote schijf met dikte d is gemaakt van LIH diëlektrisch materiaal met relatieve permittiviteit ε_r. We kiezen de oorsprong O aan de onderzijde van de schijf, de z-as loodrecht op de schijf en de x-as langs de schijf zoals getekend in de figuur. Op de onderzijde van de schijf is een vrije positieve oppervlakteladingsdichtheid σ_f aangebracht. Verder zijn er geen vrije ladingen op of in de schijf aanwezig.



a. [6 punten] Bepaal het $\vec{D}$-veld overal in de ruimte naar richting en grootte.

b. [6 punten] Bepaal hieruit het $\vec{E}$-veld overal in de ruimte naar richting en grootte.

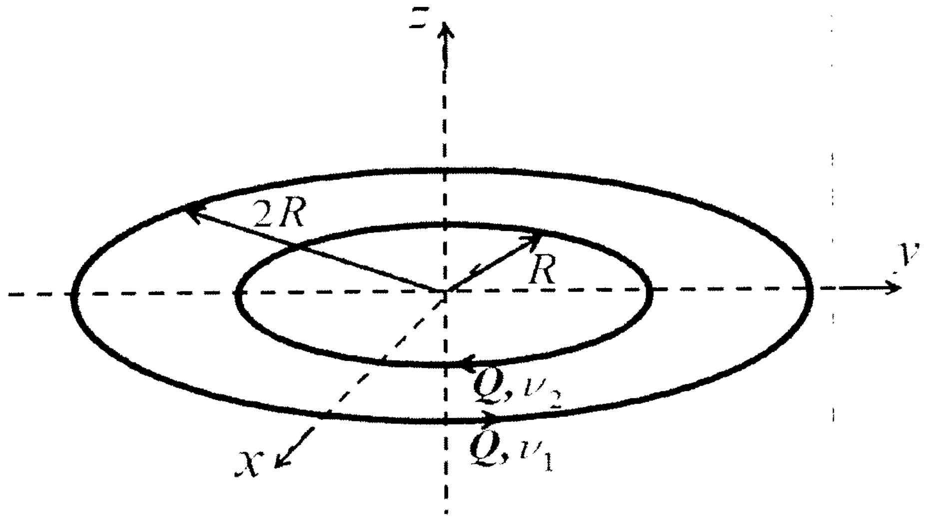
c. [6 punten] Zet in grafiekvorm de $\vec{D}$- en $\vec{E}$-velden langs de z-as uit en verklaar eventuele discontinuïteiten.

d. [6 punten] Bepaal de polarisatie $\vec{P}$ van het diëlektricum en hieruit de gebonden ladingsdichtheden.

e. [6 punten] Laat zien dat het $\vec{E}$-veld ook afgeleid kan worden uit de vrije en gebonden ladingsdichtheden.

Opgave 3

Twee draadringen, de één met straal R, de ander met straal 2R zijn concentrisch opgesteld in het vacuüm. Beide ringen zijn uniform geladen met lading Q (Q>0). We kiezen de x- en de y-as in het vlak van beide ringen, de z-as loodrecht hierop en door het middelpunt van beide ringen (zie tekening). De buitenring draait met ν_1 omwentelingen per seconde om de z-as in de aangegeven richting. De binnenring draait met ν_2 omwentelingen per seconde om de z-as in de tegengestelde richting.



a) [5 punten] Gebruik symmetrie om de richting van het $\vec{B}$-veld overal op de z-as te bepalen en voor alle punten in het xy-vlak.

b) [9 punten] Bereken het $\vec{B}$-veld overal op de z-as ten gevolge van de ronddraaiende draadringen.

c) [7 punten] Geef de benadering voor het $\vec{B}$-veld op de z-as voor $z \gg R$. Neem de twee belangrijkste termen in de ontwikkeling mee.

d) [7 punten] Bereken het magnetisch dipoolmoment $\vec{m}$ van de ronddraaiende draadringen.

e) [7 punten] Hoe groot moet ν_2 gekozen worden (uitgedrukt in ν_1) opdat het magnetisch dipoolmoment $\vec{m} = 0$ wordt? Wat is dan het karakter van het $\vec{B}$-veld op grote afstand van de oorsprong?

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$