per 4

NS-251b

prioriteit: 3

Tentamen NS-B251 Elektrodynamica 2, 6 juli 2007

Duur: 3 uur

Open-boektentamen: nee

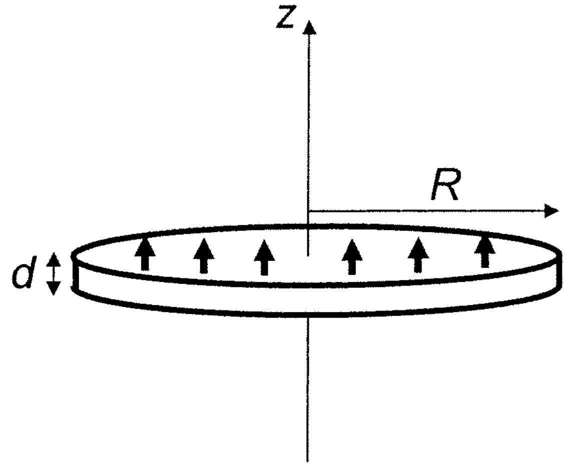
Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

Normering zoals aangegeven in de opgaven

Opgaven 1, 2 en 3 s.v.p. op aparte vellen maken en inleveren

Opgave 1 [totaal 35 p]

Een platte, ronde schijf met straal R en dikte d $(d \ll R)$ is homogeen gemagnetiseerd langs de centrale as loodrecht op de schijf (de z-as; zie onderstaande figuur). De magnetisatie wordt gegeven door $\vec{M} = M\hat{z}$ met M een positieve constante.



a) [5 p.] Bereken het magnetisch dipoolmoment $\vec{m}$ van de schijf.

b) [7 p.] Bereken $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ via de wet van Ampère voor het $\vec{H}$-veld, met als kring de z-as die via het oneindige wordt gesloten.

c) [8 p.] Laat zien dat het $\vec{B}$-veld overal in de ruimte gelijk is aan het veld t.g.v. een stroom over het oppervlak van de schijf $(r = R)$, met oppervlakte stroomdichtheidsvector $\vec{K}_b = M\hat{\phi}$. Geef de richting van deze oppervlakte stroom expliciet aan.

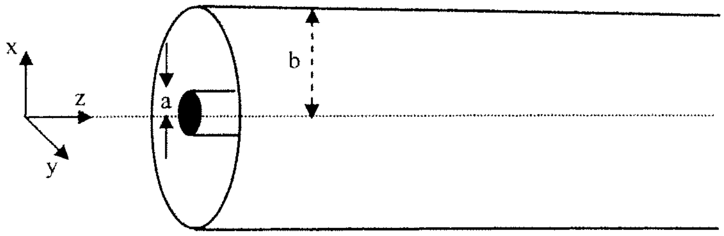
We nemen nu een dun, niet magnetisch, metalen bandje (dikte d, straal R) dat precies om bovenstaande schijf heen past en schuiven dit eromheen. De diamagnetische eigenschappen van het metalen bandje mogen worden verwaarloosd.

d) [7 p.] Een vrije stroom wordt door het bandje gestuurd met oppervlakte stroomdichtheidsvector $\vec{K}_f = M\hat{\phi}$ (M is dezelfde positieve constante als hierboven). Bereken opnieuw $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ langs dezelfde gesloten kring als bij onderdeel b).

e) [8 p.] Zelfde vraag als bij onderdeel d) wanneer de richting van $\vec{K}_f$ wordt omgekeerd (bij gelijkblijvende grootte). Wat kunt U nu zeggen over het $\vec{B}$-veld overal in de ruimte?

Opgave 2 [totaal 35 p]

We beschouwen een coaxiale geleider bestaande uit een geleider met de straal a in een cilindrische trilholte met de straal b. De geleider en cilinder zijn oneindig lang in de z-richting (zie figuur).



We veronderstellen dat de geleider en de wanden van de cilinder ideale geleiders zijn ($\vec{E}=0$ en $\vec{B}=0$ in de materialen). We zoeken oplossingen voor de elektromagnetische golven:

$$\tilde{\mathbf{E}}(x,y,z,t)=\tilde{\mathbf{E}}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \text{ met } \tilde{\mathbf{E}}_0=E_x\hat{\mathbf{x}}+E_y\hat{\mathbf{y}}$$
$$\tilde{\mathbf{B}}(x,y,z,t)=\tilde{\mathbf{B}}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \text{ met } \tilde{\mathbf{B}}_0=B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}$$

a) [9 p.] Laat zien dat $\mathbf{E}_0(x,y)$ and $\mathbf{B}_0(x,y)$ beide voldoen aan de elektrostatische en magnetostatische vergelijkingen ($\nabla\cdot\mathbf{E}=\nabla\cdot\mathbf{B}=0$) in vacuüm. Laat verder zien dat $\nabla\times\mathbf{E}_0(x,y)=0$ en $\nabla\times\mathbf{B}_0(x,y)=0$.
b) [5 p.] Bepaal met behulp van de Maxwell vergelijkingen de relatie tussen k and ω.
c) [7 p.] Welke randvoorwaarden voor de elektromagnetische velden, E en B, zijn aan de geleider en aan de binnenwanden van de trilholte van toepassing? Gezien de cilindersymmetrie is het handig in cilindercoördinaten te werken (s,φ,z)
d) [7 p.] Laat zien dat de transversale (E_z=0) elektrische golf,
$$\mathbf{E}(s,\varphi,z,t)=\frac{A\cos(kz-\omega t)}{s}\hat{\mathbf{s}}$$
voldoet aan de wet van Gauss en aan de randvoorwaarden bepaald in c). A is een constante.
e) [7 p.] Bepaal met behulp van de wet van Faraday het $\mathbf{B}(s,\varphi,z,t)$ veld horende bij het E-veld in d)

Opgave 3 [totaal 30 p]

De meetbare elektromagnetische velden, $\vec{E}$ en $\vec{B}$, kunnen in termen van het scalaire veld, V, en het vector potentiaal, $\vec{A}$, uitgedrukt worden als:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad [1]$$

en

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad [2]$$

a) [6 p.] Laat door berekening zien dat het magneetveld, $\vec{B}$, als uitgedrukt in [1] voldoet aan de Maxwell vergelijking $\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0\right]$

b) [6 p.] Laat door berekening zien dat de wet van Gauss uigedrukt in V en $\vec{A}$ geschreven kan worden als

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

c) [6 p.] Laat door berekening zien, dat de wet van Ampère-Maxwell geschreven kan worden als

$$\left(\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial^2 t}\right) - \nabla\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{J}$$

d) [6 p.] Bepaal door berekening de elektromagnetische velden, $\vec{E}$ en $\vec{B}$, voor

$$V = 0, \quad \vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c}\left(ct - |x|\right)^2 \hat{\mathbf{z}}, & |x| < ct, \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

e) [6 p.] Is de bovengenoemde vector potentiaal, $\vec{A}$, in de Coulomb ijk ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) of in de Lorentz ijk ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$)

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $\nabla t = \dfrac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \dfrac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \dfrac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$

Divergence : $\nabla\cdot\mathbf{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl : $\nabla\times\mathbf{v} = \left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$

Laplacian : $\nabla^2 t = \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $\nabla t = \dfrac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Divergence : $\nabla\cdot\mathbf{v} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$

Curl :

$$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $\nabla^2 t = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial t}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $\nabla t = \dfrac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dfrac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$

Divergence : $\nabla\cdot\mathbf{v} = \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl : $\nabla\times\mathbf{v} = \left[\dfrac{1}{s}\dfrac{\partial v_z}{\partial\phi} - \dfrac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\dfrac{\partial v_s}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \dfrac{1}{s}\left[\dfrac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \dfrac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$

Laplacian : $\nabla^2 t = \dfrac{1}{s}\dfrac{\partial}{\partial s}\left(s\dfrac{\partial t}{\partial s}\right) + \dfrac{1}{s^2}\dfrac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \dfrac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(7) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla\times(\nabla f) = 0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}(\nabla f)\cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int(\nabla\cdot\mathbf{A})\,d\tau = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$

FUNDAMENTAL CONSTANTS

$\epsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$ (permittivity of free space)

$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ (permeability of free space)

$c = 3.00\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$ (speed of light)

$e = 1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ (charge of the electron)

$m = 9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$ (mass of the electron)

SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

Spherical

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Cylindrical

$$\begin{cases} x = s\cos\phi \\ y = s\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$