per 4 prioriteit : 1

Hertentamen NS-251B Electrodynamica, augustus 2007

29-8-2007

Duur: 3 uur

Open-boek tentamen: nee

Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

Normering zoals aangegeven in de opgaven

De opgaven s.v.p. op aparte vellen maken en inleveren

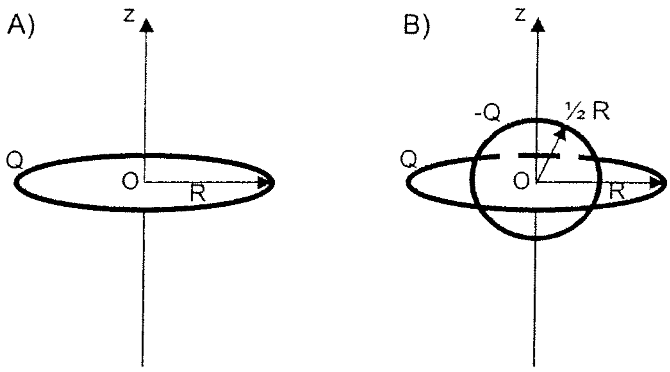
NB: Voorafgaande van het tentamen moet je aangeven of je wenst dat de tussentoets meetelt voor het bepalen van het eindcijfer!

Opgave 1 [50 punten]

Een positieve lading Q is homogeen verdeeld over een cirkelomtrek met straal R. Voor deze ringlading kiezen we de oorsprong in het middelpunt van de cirkel en de z-as loodrecht op het vlak van de cirkel (zie figuur A).

a) [4 punten] Bepaal overal op de z-as de potentiaal V(z) t.o.v. het oneindige ten gevolge van de ringlading.

b) [4 punten] Bereken vervolgens het $\vec{E}$-veld van de ringlading overal op de z-as.



We beschouwen nu situatie B). Een boloppervlak, gemaakt van isolerend materiaal, wordt binnenin de ringlading geplaatst met het middelpunt in de oorsprong O. Het boloppervlak heeft een straal ½ R en is *homogeen* geladen met lading -Q.

c) [6 punten] Bepaal opnieuw de potentiaal V(z) t.o.v. het oneindige overal op de z-as (zowel buiten het boloppervlak als er binnenin).

d) [6 punten] Bereken het $\vec{E}$-veld overal op de z-as.

e) [6 punten] Geef de benadering voor het $\vec{E}$-veld voor $z \gg R$? Hoe wordt een dergelijk veld genoemd (m.a.w., wat is het karakter van het $\vec{E}$-veld op grote afstand)?

We beschouwen wederom situatie B), maar nu wordt het boloppervlak van isolerend materiaal vervangen door een *metalen* boloppervlak (zelfde straal ½ R; zelfde middelpunt O). Ook het metalen boloppervlak is geladen met lading –Q.

f) [4 punten] Is de lading op het metalen boloppervlak homogeen verdeeld? Zo niet, waar zit de meeste lading?

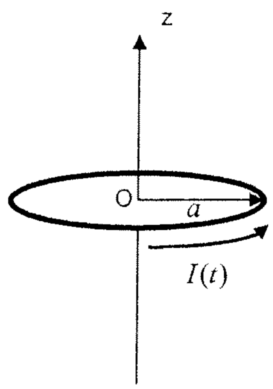
g) [8 punten] Potentiaal en $\vec{E}$-veld kunnen overal in de ruimte buiten het metalen boloppervlak worden bepaald uit 2 ringladingen en een puntlading. Hoe groot zijn deze ladingen en waar moeten ze worden geplaatst?

h) [6 punten] Bereken het $\vec{E}$-veld overal op de z-as.

i) [6 punten] Bepaal de potentiaal V_b van het metalen boloppervlak.

Opgave 2 [50 punten]

Een tijdsafhankelijke stroom, $I(t) = I_0 t / t_0$, loopt door een metalen ring met straal a en elektrische weerstand R - zie tekening. De stroomtoename is zo langzaam dat het systeem als magnetostatisch beschouwd mag worden.



a) [5 punten] Laat door berekening zien dat het magneetveld op de z-as, $B(z,t)$, geschreven kan worden als

$$B(z,t) = \frac{\mu_0 I_0 t}{2t_0} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

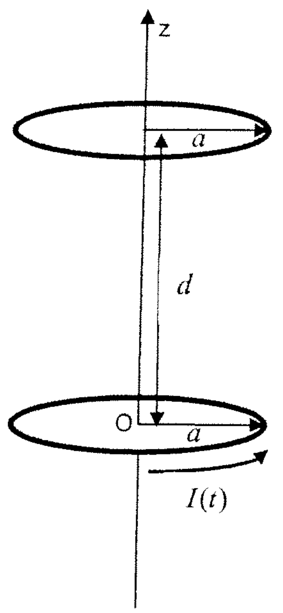
b) [5 punten] Bereken het magnetisch dipoolmoment $\vec{m}(t)$ van de metalen ring.

c) [5 punten] Het magneetveld van een magnetische dipool kan geschreven worden als

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|\vec{m}(t)|}{r^3} [2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}]$$

Laat door berekening zien dat het magnetische dipoolveld op de z-as op grote afstand van O gelijk aan het in a) gevonden magneetveld is.

Een tweede ring wordt op afstand d ($d \gg a$) van de eerste ring geplaatst, zie tekening. De twee ringen hebben dezelfde straal en weerstand. U mag de zelfinductie van de ringen verwaarlozen.



d) [5 punten] Bepaal de magnetische flux door de bovenste ring.

e) [5 punten] Bepaal de elektromotorische kracht in de bovenste ring.

f) [5 punten] Bepaal de geïnduceerde stroom, inclusief de richting, in de bovenste ring.

g) [5 punten] Bepaal ook het geïnduceerde dipoolmoment $\vec{m}_{ind}(t)$ in de bovenste ring.

h) [5 punten] Hoe groot is de wederzijdse inductie *M*.

i) [5 punten] Laat zien dat de interactie tussen de magnetische dipolen van de ringen tot een kracht leidt

$$F = \frac{3\pi^2\mu_0^2}{4}\frac{a^8}{Rz^7}\frac{I_0^2 t}{t_0^2}$$

Is de kracht aantrekkend of afstotend?

k) [5 punten] Bepaal de warmte die is vrijgekomen tot tijd t.

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$

Divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$

Laplacian: $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$

Curl: $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$

$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Laplacian: $\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient: $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$

Divergence: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl: $\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$

Laplacian: $\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(7) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla\times(\nabla f) = 0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem: $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}(\nabla f)\cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem: $\int(\nabla\cdot\mathbf{A})\,d\tau = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem: $\int(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$

FUNDAMENTAL CONSTANTS

ϵ_0	$= 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$	(permittivity of free space)
μ_0	$= 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$	(permeability of free space)
c	$= 3.00\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$	(speed of light)
e	$= 1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C}$	(charge of the electron)
m	$= 9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$	(mass of the electron)

SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

Spherical

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Cylindrical

$$\begin{cases} x = s\cos\phi \\ y = s\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$