Tentamen NS-251B Electrodynamica, 1 juli 2011

Duur: 3 uur

Open-boek tentamen: nee

Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

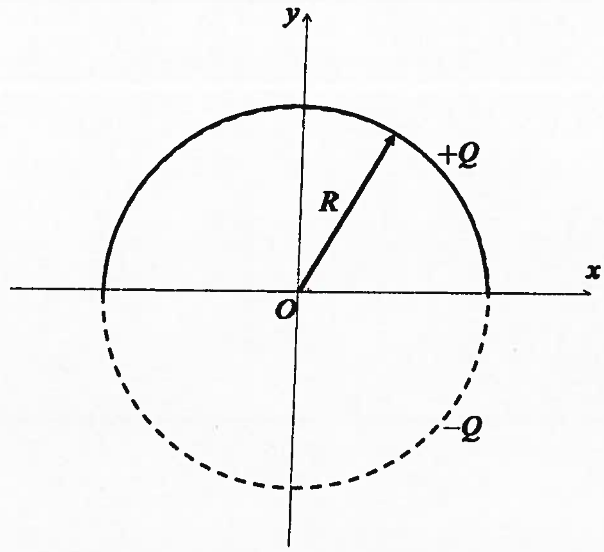
Gebruik van rekenmachine toegestaan

Normering zoals aangegeven in de opgaven

Opgaven 1, 2 en 3 s.v.p. op aparte vellen maken en ieder vel voorzien van naam

Opgave 1

Een draadring met straal R en verwaarloosbare dikte bevindt zich in vacuüm. De ring ligt in het xy-vlak met de oorsprong O als middelpunt (zie figuur). De ene helft van de ring $(y > 0)$ is homogeen geladen met een positieve lading +Q, de andere helft van de ring $(y < 0)$ met een even grote, negatieve lading –Q. De z-as staat loodrecht op het vlak van tekening en gaat door de oorsprong. We kiezen de potentiaal in het oneindige gelijk aan nul.



5 a. [5 punten] Gebruik symmetrie argumenten om de richting van het $\vec{E}$-veld op de x-as, de y-as en de z-as te bepalen.

1/2 b. [9 punten] Bereken het $\vec{E}$-veld in de oorsprong O.

1/2 c. [9 punten] Bereken het dipoolmoment $\vec{p}$ van deze ladingsverdeling.

1/2 d. [7 punten] Bepaal het $\vec{E}$-veld op de x-as, de y-as en de z-as op grote afstand van de oorsprong O.

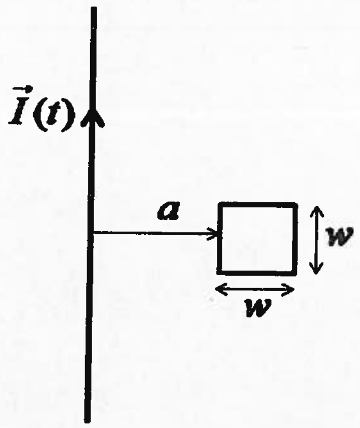
/ e. [5 punten] Hoeveel energie kost het om een positieve puntlading +q vanuit het oneindige over de z-as naar de oorsprong te verplaatsen?

35

5
4
4
3
16

Opgave 2

Door een oneindig lange, rechte stroomdraad loopt een lineair in de tijd toenemende stroom $I(t) = I_o t$ met I_o een positieve konstante en t de tijd. Op afstand a van de draad bevindt zich een klein vierkant spoeltje met één winding, zijden w en weerstand R (zie figuur). In deze opgave laten we retardatie effecten buiten beschouwing.



5

a. [5 punten] Gebruik de wet van Ampère om het tijdsafhankelijke $\vec{B}$-veld te bepalen op afstand r van de draad.
7

b. [7 punten] Bereken de electromotorische kracht ε die door dit $\vec{B}$-veld in het spoeltje wordt opgewekt.

→ 3 c. [6 punten] Er loopt een stroom door het spoeltje. In welke richting en waarom? Bepaal de grootte van de stroom.

d. [6 punten] Bereken de wederzijdse induktie M van stroomdraad en spoeltje.

e. [6 punten] Het elektrisch veld $\vec{E}$ dat door het tijdsafhankelijke $\vec{B}$-veld wordt veroorzaakt staat parallel aan de stroomdraad. Hoe groot is het verschil in grootte van het $\vec{E}$-veld op afstand a en op afstand a+w van de stroomdraad?

30

5
7
3
6
21

Opgave 3

De Maxwell vergelijkingen in zeer goede ($\sigma \gg \varepsilon$), lineaire, Ohmse geleiders ($\vec{J}_f = \sigma\vec{E}$) reduceren tot:

$$\text{(i) } \nabla\cdot\vec{E}=0;\ \text{(ii) } \nabla\cdot\vec{B}=0;\ \text{(iii) } \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\ \nabla\times\vec{B}=\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\sigma\vec{E}$$

met ε de permittiviteit, μ de permeabiliteit en σ het geleidingsvermogen van de geleider.

√ a) [7 punten] Laat zien hoe deze vergelijkingen volgen uit de algemene Maxwell vergelijkingen.

√ b) [7 punten] Leidt uit bovenstaande vergelijkingen de golfvergelijkingen af voor het elektrische veld $\vec{E}$ en het magneetveld $\vec{B}$.

We bekijken nu een monochromatische vlakke golf die zich voortplant in een zeer goede, lineaire, Ohmse geleider. De geleider bevindt zich in de halve ruimte $z \geq 0$. De golf plant zich voort in de positieve z-richting en is gepolariseerd in de x-richting;

$$\tilde{\vec{E}}(z,t)=\tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\hat{x}\ ;\ \tilde{\vec{B}}(z,t)=\frac{\tilde{k}}{\omega}\tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\hat{y}$$

met $\tilde{\vec{E}}(z,t)$ en $\tilde{\vec{B}}(z,t)$ de complexe velden, $\tilde{E}_0$ de complexe amplitude van het elektrische veld voor z=0, $\tilde{k}$ het complexe golfgetal en ω de hoekfrequentie. U mag aannemen dat $\sigma \gg \varepsilon\omega$ waarbij geldt dat $\tilde{k}=\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}(1+i)$.

/ c) [7 punten] Bepaal de gemiddelde energiedichtheid $\langle u(z)\rangle$ van de vlakke golf (bedenk dat het reële deel van de golf genomen moet worden). Wordt $\langle u(z)\rangle$ gedomineerd door het elektrische of door het magnetische deel?

½ d) [7 punten] Bereken de Poynting vector $\vec{S}(z)$ en hieruit de intensiteit $I(z)$ van de vlakke golf.

/ e) [7 punten] Bereken de gemiddelde hoeveelheid energie die per eenheid van oppervlak door de geleider wordt geabsorbeerd in het gebied tussen z en $z+d$ (met $d>0$).

35

7
7
3
17

17
16
21

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$

Divergence : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl : $\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$

Laplacian : $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Divergence : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$

Curl :
$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$

Divergence : $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Curl : $\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$

Laplacian : $\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

VECTOR IDENTI

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEORI

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$