Tentamen NS-251B Electrodynamica, 4 juli 2014

Duur: 3 uur

Open-boek tentamen: nee

Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

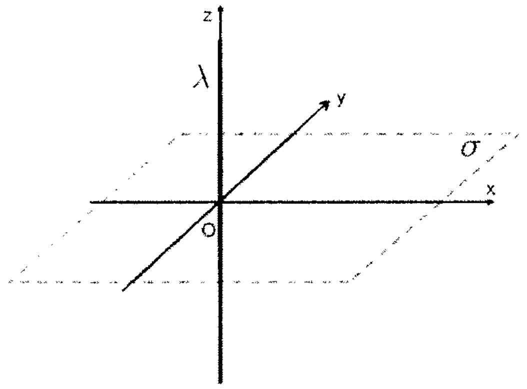
Gebruik van rekenmachine toegestaan

Normering zoals aangegeven in de opgaven

Opgaven 1, 2 en 3 s.v.p. op aparte vellen maken en ieder vel voorzien van naam

Opgave 1

Een oneindig lange lijnlading met uniforme positieve lijnladingsdichtheid λ snijdt onder een loodrechte hoek een oneindig grote, uniform geladen ladingslaag met negatieve oppervlakteladingsdichtheid σ. De ladingsverdelingen bevinden zich in vacuüm. We kiezen de z-as langs de lijnlading, het xy-vlak in de ladingslaag en de oorsprong O in het snijpunt van beide ladingsverdelingen (zie figuur).



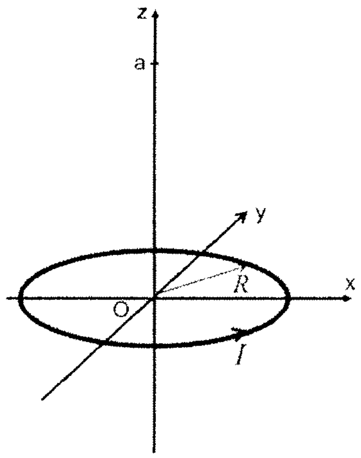
a. [5 punten] Welke symmetrie eigenschappen heeft de ladingsverdeling en wat is het gevolg voor het elektrische veld $\vec{E}$?
b. [8 punten] Bereken het $\vec{E}$-veld overal in de ruimte. Maak gebruik van cilindercoördinaten.
c. [5 punten] Schets de elektrische veldlijnen in het xz-vlak die beginnen op de z-as in $z = \pm a\,(a > 0)$. Let op de hoeken die de veldlijnen maken met de assen.

Rotatie om de z-as van de veldlijnen bepaald bij onderdeel c) geeft een gesloten oppervlak. De elektrische flux door dit oppervlak Φ_E is gelijk aan 0.

d. [5 punten] Geef aan waarom Φ_E door dit oppervlak gelijk 0 is.
e. [7 punten] De snijlijn van dit gesloten oppervlak en het xy-vlak is een cirkel. Bepaal de straal R van deze cirkel.

Opgave 2

Een stroomcirkel met straal R voert een stroom $I = I_0 t^2 \; (I_0 > 0)$ die kwadratisch toeneemt in de tijd t. We kiezen het xy-vlak in het vlak van de stroomcirkel, de z-as loodrecht op de stroomcirkel en de oorsprong O in het midden ervan (zie tekening). Het magneetveld $\vec{B}$ op de z-as t.g.v. de stroom wordt gegeven door $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2} \dfrac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \hat{z}$.



a) [5 punten] Bepaal het magnetisch dipoolmoment $\vec{m}$ van de stroomvoerende cirkel.

b) [10 punten] Bereken m.b.v. $\vec{m}$ het $\vec{B}$-veld op de z-as voor $z = a \left(a \gg R\right)$. Laat zien dat uw antwoord consistent is met de formule zoals in de opgave gegeven.

Een tweede stroomcirkel met straal R wordt nu geplaatst parallel aan de eerste stroomcirkel en met het middelpunt in $z = a$. De weerstand van deze stroomcirkel is R_w.

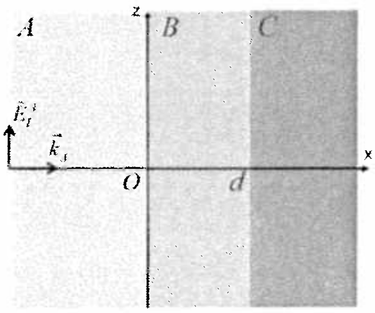
c. [5 punten] Bereken de magnetisch flux Φ_B door deze tweede stroomcirkel t.g.v. het $\vec{B}$-veld van de eerste stroomcirkel. Doe dit in benadering door gebruik te maken van het $\vec{B}$-veld op de z-as.

d. [8 punten] Bereken de elektromotorisch kracht ε in de tweede stroomcirkel en hiermee de stroom die er gaat lopen. Geef expliciet de richting van de stroom aan. De zelfinduktie van de tweede stroomcirkel mag hierbij worden verwaarloosd.

e. [7 punten] In de benadering zoals gebruikt bij onderdeel c) wordt er geen netto kracht op de tweede stroomcirkel uitgeoefend. Waarom niet? Leg uit waarom er in werkelijkheid wél een netto kracht op de tweede stroomcirkel wordt uitgeoefend. Geef de richting van de kracht aan.

Opgave 3

Drie lineaire, niet geleidende media A, B en C zijn opgesteld als in onderstaande figuur. De x-as wordt loodrecht op de drie media gekozen. Medium A bevindt zich in de halve ruimte $x \leq 0$, medium C in de ruimte $x \geq d$ en medium B er tussenin ($0 < x < d$). De y-as en de z-as liggen langs het grensvlak van A en B (y-as loodrecht op het vlak van tekening, naar binnen gericht). De brekingsindices van de media zijn respectievelijk n_A, n_B en n_C. De permeabiliteit van de drie media is μ_0. Er zijn geen vrije ladingen (noch vrije stromen). Een monochromatische vlakke golf plant zich voort van links naar rechts in medium A en valt loodrecht in op medium B. Het complexe elektrische veld van deze inkomende golf geven we aan met $\tilde{E}_I^A = \tilde{E}_{0,I}^A e^{i(k_A x - \omega t)} \hat{z}$ met $\tilde{E}_{0,I}^A$ de complexe amplitude van de golf, k_A het golfgetal en ω de hoekfrequentie. De complexe amplituden van gereflecteerde golf in gebied A geven we aan met $\tilde{E}_{0,R}^A$, van naar rechts en links lopende golven in gebied B met $\tilde{E}_{0,re}^B$ respectievelijk $\tilde{E}_{0,li}^B$ en van doorgelaten golf in gebied C met $\tilde{E}_{0,T}^C$.



a. [4 punten] Bepaal de golfgetallen k_B en k_C van de golven in de media B en C en druk uit in de gegeven grootheden.

b. [6 punten] Bepaal de voortplantingssnelheden v_A, v_B, v_C van de golven in de media A, B, C en druk uit in de gegeven grootheden.

c. [10 punten] Geef algemene uitdrukkingen voor de elektromagnetische velden in de drie gebieden (elektrische en magnetische velden) en druk uit in de gegeven grootheden.

9/ d. [10 punten] Toepassen van de randvoorwaarden voor de velden aan de grensvlakken $x = 0$ en $x = d$ leidt tot 4 vergelijkingen waar de complexe amplituden van de elektrische velden aan moeten voldoen. Geef deze 4 vergelijkingen.

Voor de situatie dat $k_B d = \pi/2$ kan de transmissiecoëfficiënt T van de drie media geschreven worden als $T = \dfrac{4 n_A n_C n_B^2}{\left(n_A n_C + n_B^2\right)^2}$.

e. [5 punten] Hoe moet n_B worden gekozen (uitgedrukt in n_A en n_C) opdat de gehele golf door de drie media wordt doorgelaten?

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$