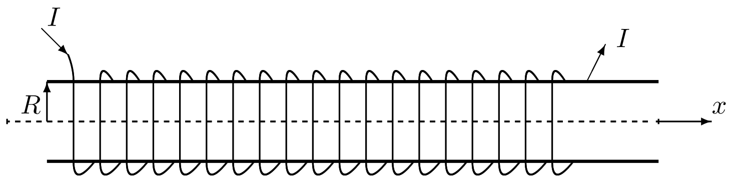
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-251b werd in 2004/2005 gegeven door prof. dr. H. Rudolph.

Elektrodynamica (NS-251b)
8 juli 2005

Opgave 1 *(30 punten)*

Om een oneindig lange, holle, cilindrische buis met zeer dunne wand en met straal R is een spoel gewonden (zie figuur). De as van de cilinder valt samen met de x-as. De windingsdichtheid van de spoel wordt gegeven door n en is zeer groot. Door de spoel loopt een stroom I. In deze opgave mogen de magnetische eigenschappen van de wand van de cilinder en van de draden van de spoel worden verwaarloosd. Aanvankelijk heerst binnenin de buis vacuüm.



a) Geef alle symmetrie-eigenschappen van de stroomverdeling. Wat is het gevolg voor de richting van het $\vec{B}$-veld? Gebruik de wet van Ampère om de grootte van het $\vec{B}$-veld buiten de spoel te bepalen. *(6 punten)*

De buis wordt vervolgens gevuld met gasvormig (paramagnetisch) zuurstof. Bij de gegeven druk en temperatuur wordt de magnetische susceptibiliteit gegeven door χ_m.

b) Bereken de grootte en de richting van het $\vec{H}$-veld binnen en buiten de spoel. *(6 punten)*

c) Bereken nu opnieuw de richting en grootte van het $\vec{B}$-veld. Is het veld groter of kleiner dan het veld gevonden bij onderdeel a)? *(6 punten)*

d) Bereken de magnetisatie $\vec{M}$ binnenin de buis. Bereken hiermee de gebonden stroomdichtheids-vectoren $\vec{J}_b$ en $\vec{K}_b$. *(6 punten)*

Het aantal zuurstofmoleculen in de buis wordt nu verdubbeld (bij gelijkblijvende temperatuur). Ga er bij het volgende onderdeel vanuit dat de magnetische momenten van de zuurstofmoleculen elkaar niet beïnvloeden.

e) Veranderen hierdoor het $\vec{B}$-veld en de magnetisatie $\vec{M}$? Zo ja, hoeveel en waarom? Zo nee, waarom niet? *(6 punten)*

Opgave 2 *(30 punten)*

De meetbare elektromagnetische velden, $\vec{E}$ en $\vec{B}$, kunnen in termen van het scalaire veld, V, en de vectorpotentiaal, $\vec{A}$, uitgedrukt worden als:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1}$$

en

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2}$$

a) Bepaal door berekening de elemtromagnetische velden, $\vec{E}$ en $\vec{B}$, in vacuüm horend bij

$$V(\vec{r},t) = 0, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

waarbij $\vec{k}$ en ω tijdsonafhankelijk zijn. *(10 punten)*

b) Laat door berekening zien dat de wet van Gauss leidt tot $\vec{k}\cdot\vec{A} = 0$. *(5 punten)*

c) Laat door berekening zien dat de wet van Ampère-Maxwell leidt tot

$$\vec{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

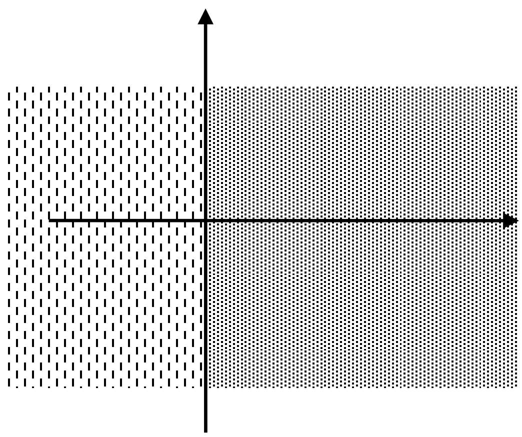
(5 punten)

d) Omschrijf in woorden de elektromagnetische golf gevonden in a).
Wat is de consequentie van de waarde voor k bepaald in c)? *(5 punten)*

e) Voldoet de bovengenoemde vectorpotentiaal, $\vec{A}$, aan de Coulomb ijk ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$) of aan de Lorentz ijk $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right)$? *(5 punten)*

Opgave 3 *(40 punten)*

Beschouw een vlakke, lopende elektromagnetische golf ($\tilde{\mathbf{E}}_I^A(z,t) = \tilde{E}_{0l}^A\, e^{i(k_A z-\omega t)}\hat{x}, \tilde{\mathbf{B}}_I^A(z,t) = \tilde{B}_{0I}^A\, e^{i(kz-\omega t)}\hat{y} = n_A\frac{\tilde{E}_{0I}^A}{c}\, e^{i(kz-\omega t)}\hat{y}$), met frequentie ω, die van medium A loodrecht invalt op medium B (zie tekening).

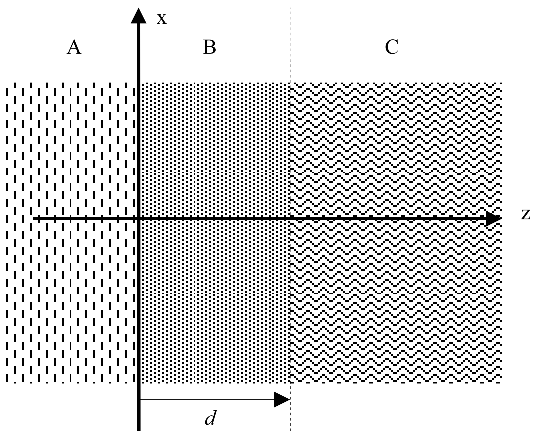


Dit geeft aanleiding tot een gereflecteerde ($\tilde{\mathbf{E}}_R^A(z,t) = \tilde{E}_{0R}^A\, e^{i(-k_A z-\omega t)}\hat{x}$ en een getransmitteerde golf ($\tilde{\mathbf{E}}_T^B(z,t) = \tilde{E}_{0T}^B e^{i(k_B z-\omega t)}\hat{x}$. Beide media zijn niet-geleidend en lineair (brekingsindex n_A en n_B) en u mag aannemen dat $\mu_A = \mu_B = \mu_0$. De randvoorwaarden voor de EM-velden aan het grensvlak zijn:

$$\begin{array}{llll} (i) & \varepsilon_A E_A^{\perp} = \varepsilon_B E_B^{\perp} & (iii) & \vec{E}_A^{||} = \vec{E}_B^{||} \\ (ii) & B_A^{\perp} = B_B^{\perp} & (iv) & \frac{1}{\mu_A}\vec{B}_B^{||} \end{array}$$

a) Laat door berekening zien dat $\tilde{E}_{0I}^A + \tilde{E}_{0R}^A = \tilde{E}_{0T}^B$ en $\tilde{E}_{0I}^A - \tilde{E}_{0R}^A = \frac{n_B}{n_A}\tilde{E}_{0T}^B$. *(5 punten)*

b) Bepaal door berekening de reflectiecoëfficiënt, $R \equiv \frac{I_R^A}{I_I^A} = \left(\frac{E_{0R}^A}{E_{0I}^A}\right)^2$ en de transmissiecoëfficiënt $T \equiv \frac{I_T^B}{I_I^A} = \frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B}\left(\frac{E_{0T}^B}{E_{0I}^A}\right)^2$, uitgedrukt in n_A en n_B, en met $E_{0I}^A \equiv \mathrm{Re}(\tilde{E}_{0I}^A)$. *(5 punten)*



Stel nu, dat medium B een dikte d heeft en er nog een lineair medium C (halfoneindig) wordt toegevoegd, zie tekening. Alle drie de media zijn niet-geleidend en lineair (brekingsindices respectievelijk n_A, n_B en n_c) en u mag aannemen dat $\mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_0$.

c) Geef een uitdrukking voor de EM-velden in de drie gebieden (bedenk dat er in gebied A een inkomende en een gereflecteerde golf is, in gebied B een naar rechts lopende golf en een naar links lopende golf en in gebied C **alleen** een getransmitterde golf). *(5 punten)*

d) Bepaal de randvoorwaarden voor de EM-velden op $z = 0$ (grensvlak A-B) en op $z = d$ (grensvlak B-C). *(10 punten)*

Het kan aangetoond worden dat de totale transmissiecoëfficiënt T geschreven kan worden als:

$$T = \frac{4n_A n_C n_B^2}{n_B^2(n_A + n_C)^2 \cos^2(k_B d) + (n_A n_C + n_B^2)^2 \sin^2(k_B d)}$$

e) Toon aan door berekening dat er geen reflectie ($T = 1$) is als $n_B = \sqrt{n_A n_C}$ en $k_B d = \frac{\pi}{2}$. *(5 punten)*

f) Toon aan dat de minimale dikte d van een antireflectiecoating (dun opgedampt laagje) gegeven wordt door

$$d_{\text{min}} = \frac{\lambda_A}{4}\sqrt{\frac{n_A}{n_C}}.$$

(5 punten)

g) Wat is de minimale dikte voor een coating op een glaslens ($n_C = 1,5$) werkend in lucht ($n_A = 1,0$) en voor zichtbaar licht ($\lambda_A \simeq 5,0 \cdot 10^{-7}$ m)?

Hoeveel neemt de reflectie af door deze coating?

Maakt het uit of de coating aan de ene of de andere kant is opgedampt? *(5 punten)*

Vectorafgeleides

Cartesian. $d\,\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Gradient}: && \nabla t &&= \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \\
&\textit{Divergence}: && \nabla \cdot \mathbf{v} &&= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&\textit{Curl}: && \nabla \times \mathbf{v} &&= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

Spherical. $d\,\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Gradient}: && \nabla t &&= \frac{\partial t}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial t}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial t}{\partial \phi}\,\hat{\phi} \\
&\textit{Divergence}: && \nabla \cdot \mathbf{v} &&= \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\
&\textit{Curl}: && \nabla \times \mathbf{v} &&= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} \\
& && &&\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi} \\
&\textit{Laplacian}: && \nabla^2 t &&= \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

Cylindrical. $d\,\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Gradient}: && \nabla t &&= \frac{\partial t}{\partial s}\,\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial t}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} \\
&\textit{Divergence}: && \nabla \cdot \mathbf{v} &&= \frac{1}{s}\,\frac{\partial}{\partial s}(s\,v_s) + \frac{1}{s}\,\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&\textit{Curl}: && \nabla \times \mathbf{v} &&= \left[\frac{1}{s}\,\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}} \\
&\textit{Laplacian}: && \nabla^2 t &&= \frac{1}{s}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\,\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$