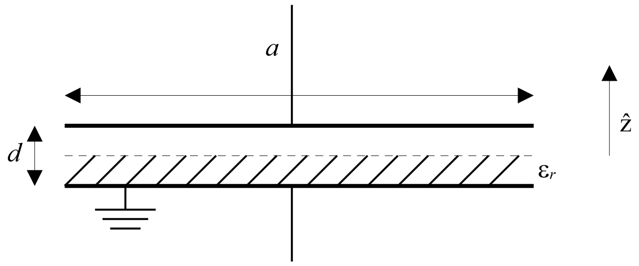
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-251b werd in 2004/2005 gegeven door Dr. P.A. Zeijlmans van Emmichoven en Prof. Dr. H. Rudolph.

Elektrodynamica (NS-251b)
2 september 2005

Opgave 1 *(35 punten)*

Een zeer grote, vlakke condensator met vierkante platen met zijden a en afstand d tussen de platen is opgesteld in vacuüm ($a \gg d$). De condensator is voor de helft gevuld met een LIH diëlektricum met relatieve permittiviteit ϵ_r (zie tekening). De onderste plaat is geaard, op de bovenste plaat zit een een positieve vrije lading Q. Verwaarloos in deze opgave randeffecten.



a) Gebruik symmetrie om de richting van het $\vec{D}$-veld overal tussen de platen te bepalen.

   Bereken tevens de grootte van het $\vec{D}$-veld overal tussen de platen. *(7 punten)*

b) Bereken de richting en de grootte van het $\vec{E}$-veld overal tussen de platen. *(7 punten)*

c) Bereken de polarisatievector $\vec{P}$ binnenin het diëlektricum. *(7 punten)*

d) Bereken de gebonden ladingsdichtheden ρ_b en σ_b. Hoe groot is de totale gebonden lading Q_b op het bovenvlak en hoeveel op het ondervlak van het diëlektricum? *(7 punten)*

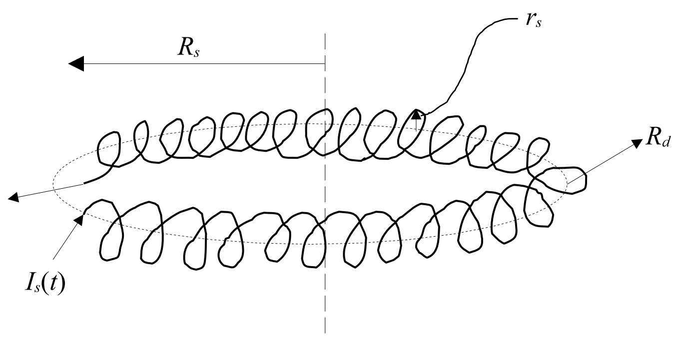
e) Bereken het potentiaalverschil V tussen de beide platen en hiermee de capaciteit C van de condensator. *(7 punten)*

Opgave 2 *(30 punten)*

Een dichtgewonden toroïdale spoel ("fietsband") met cirkelvormige doorsnede heeft in totaal N windingen. De centrale as van de spoel heeft straal R_s, de cirkelvormige doorsnede straal r_s (zie tekening op de volgende pagina; met $r_s \ll R_s$). De spoel is op een stroombron aangesloten en voert een stroom die constant in de tijd toeneemt, d.w.z. $I_s = kt$ (met k een positieve constante). Een gesloten, cirkelvormige weerstandsdraad met straal R_d en totale weerstand R staat loodrecht op de toroïdale spoel (spoel en weerstandsdraad grijpen in elkaar). U mag ervan uitgaan dat de coëfficiënt van zelfinductie L_d van de weerstandsdraad verwaarloosbaar klein is. Het geheel bevindt zich in vacuüm met permeabiliteit μ_0.

a) Gebruik symmetrie om de richting van het magneetveld $\vec{B}_s$ t.g.v. de stroom door de toroïdale spoel te bepalen. *(6 punten)*

b) Bereken de grootte van $\vec{B}_s$ overal in de ruimte. *(6 punten)*



c) Bereken de flux Φ_d door de weerstandsdraad omvat t.g.v. het magneetveld van de toroïdale spoel. *(6 punten)*

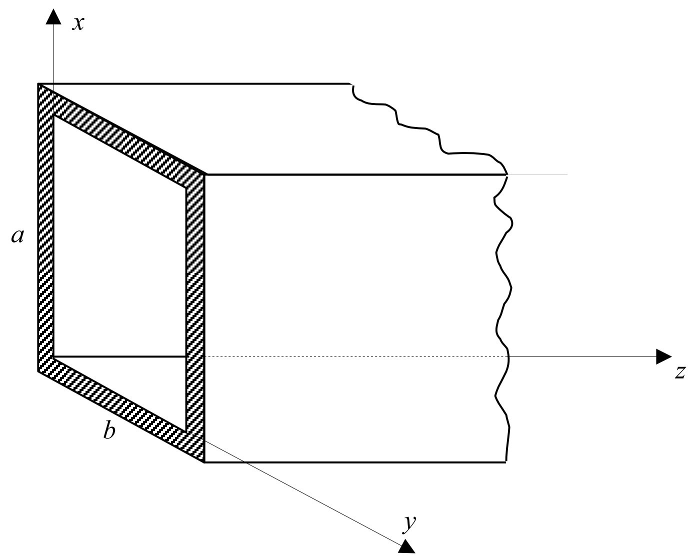
d) Bereken de elektromotorische kracht ϵ_d in de weerstandsdraad en hiermee de stroom I_d door de weerstandsdraad. Is de stroom gelijkgericht of tegengesteld aan de stroom door de spoel? *(6 punten)*

e) Bereken de coëfficiënt van wederzijdse inductie M. *(6 punten)*

Opgave 3 *(35 punten)*

We beschouwen een rechthoekige trilholte in vacuüm. De trilholte is oneindig lang in de z-richting en met de dimensie a in de x-richting en b in de y-richting ($a > b$ — zie tekening).

We veronderstellen, dat de wanden van de trilholte ideale geleiders zijn ($\vec{E} = 0$ en $\vec{B} = 0$ in de wanden).



a) Welke van de volgende randvoorwaarden voor de elektromagnetische velden, $\vec{E}$ en $\vec{B}$, zijn aan de binnenwanden van de trilholte van toepassing?

(i) $\vec{E}^{||} = 0$ (ii) $\vec{E}^{\perp} = 0$
(iii) $\vec{B}^{||} = 0$ (iv) $\vec{B}^{\perp} = 0$ *(7 punten)*

b) Toon aan hoe de in a) gevonden randvoorwaarden uit de Maxwell vergelijkingen bepaald kunnen worden. *(7 punten)*

c) We zijn geïnteresseerd in monochromatische elektromagnetische golven die in de z-richting propageren:

$$\tilde{\mathbf{E}}(x,y,z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \text{ met } \tilde{\mathbf{E}}_0 = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}} + E_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(x,y,z,t) = \tilde{\mathbf{B}}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \text{ met } \tilde{\mathbf{B}}_0 = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$$

Toon met behulp van de Maxwell-vergelijkingen aan dat:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz-\omega t)} \text{ en } \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{i\omega}{c^2}\tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz-\omega t)}.$$

(7 punten)

d) De B_z component van een elektromagnetische golf voldoet aan de volgende golfvergelijking:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right] B_z = 0.$$

Toon door berekening aan, dat de z-component van het $\vec{B}$-veld, $B_z(x,y) = B_0 \cos(\frac{m\pi x}{a}) \cos \frac{n\pi y}{b})$, horend bij een TE_{mn} (transversale elektrische) golf, een oplossing van de golfvergelijking is. Geef verder de betekenis van m en n aan. *(7 punten)*

e) Bepaal de fasesnelheid, $v \equiv \frac{\omega}{k}$, voor deze TE_{mn} golf en vergelijk deze met de lichtsnelheid, c. Wat is de frequentie (in Hz) van de laagste frequentie mode voor een trilholte met de afmetingen $a = 2 \cdot 10^{-3}$ m en $b = 1,5 \cdot 10^{-3}$ m ($c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s). *(7 punten)*

Vectorafgeleides

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

$$\begin{aligned}
\textit{Gradient}: \quad & \nabla t &=& \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \\
\textit{Divergence}: \quad & \nabla \cdot \mathbf{v} &=& \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\textit{Curl}: \quad & \nabla \times \mathbf{v} &=& \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

$$\begin{aligned}
\textit{Gradient}: \quad & \nabla t &=& \frac{\partial t}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\,\hat{\phi} \\
\textit{Divergence}: \quad & \nabla \cdot \mathbf{v} &=& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\
\textit{Curl}: \quad & \nabla \times \mathbf{v} &=& \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} \\
& && + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi} \\
\textit{Laplacian}: \quad & \nabla^2 t &=& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

$$\begin{aligned}
\textit{Gradient}: \quad & \nabla t &=& \frac{\partial t}{\partial s}\,\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} \\
\textit{Divergence}: \quad & \nabla \cdot \mathbf{v} &=& \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s\,v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\textit{Curl}: \quad & \nabla \times \mathbf{v} &=& \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}} \\
\textit{Laplacian}: \quad & \nabla^2 t &=& \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Triple Products

1. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
2. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

3. $\nabla(f\,g) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$
4. $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
5. $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$
6. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
7. $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$
8. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Sound Derivatives

9. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
10. $\nabla \times (\nabla f) = 0$
11. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

Fundamental Theorems

Gradient Theorem : $\int_a^b (\nabla f) \cdot d\,\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\,\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\,\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\,\mathbf{l}$