Tentamen Modellen en Simulatie (WISB134)

Maandag, 1 juli 2013, 9:00-12:00, Educatorium Gamma Zaal

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen dat niet.

`Uitwerking.` `In kleine type-fonts letters.`

`Puntentelling.`

`Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.`

`Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.`

Opgave 1. We bekijken in deze opgave een variant van het rups-sluipwespen model in §3.1 van het dictaat. Deze variant is gebaseerd op het Hassel-Lawton-May model.

Door handig te schalen kan de groei van een rupsen– en sluipwespenpopulatie gemodelleerd worden door

$$\begin{cases} r_{n+1} = \kappa^3 \dfrac{r_n}{(1+r_n+w_n)^3}, \\ w_{n+1} = b\, r_n\, w_n, \end{cases} \tag{1}$$

met r_n het aantal rupsen (op zekere schaal) en w_n aantal wespen (ook op zekere geschikte schaal), b en κ zijn zekere positieve constanten.

a) Bepaal voor alle $\kappa > 0$ en $b > 0$ de evenwichtspunten van (1) die biologisch relevant zijn. Hangt dat ook nog van κ en b af? Zo ja, hoe?

2 `Oplossing.` Evenwicht in $(r_n, w_n) = (\alpha, \beta)$ voor alle n, dan geldt (tweede gelijkheid in (1)) dat $\beta = b\alpha\beta$. Dus of $\beta = 0$ of $1 = b\alpha$ waarmee $\alpha = 1/b$. Evenzo volgt uit de eerste gelijkheid dat $\alpha = 0$ of $(1+\alpha+\beta)^3 = \kappa^3$. Combineren van deze mogelijkheden geeft: I $\alpha = 0$, $\beta = 0$, II $\alpha = k-1$ (de twee andere 3-de machtswortels uit k^3 zijn niet reëel en leveren biologisch irrelevante evenwichten op), $\beta = 0$, III $\alpha = 1/b$, $\beta = \kappa - 1 - 1/b$ (de andere machtswortels uit κ^3 leveren weer biologisch irrelevante evenwichten). Het 3-de evenwicht is biologisch alleen relevant als $\kappa - 1 - 1/b \geq 0$.

Uit a) blijkt dat $(1/b, \kappa - 1/b - 1)$ een evenwicht is. Neem verder $\kappa = 3$ en bekijk alleen $b \geq 1/2$, de waarden voor b waarvoor dit evenwicht biologisch relevant is.

b) Toon aan dat de eigenwaarden van de Jacobi matrix in dit evenwicht voldoen aan $\lambda^2 - (2 - 1/b)\lambda + 3 - 2/b = 0$.

3 `Oplossing.` Met $f(r,w) \equiv \kappa^3 r/(1+r+w)^3$ en $g(r,w) = brw$ is (1) gelijk aan $r_{n+1} = f(r_n, w_n)$ en $w_{n+1} = g(r_n, w_n)$. Omdat met $\kappa = 3$ in het evenwicht $(\alpha, \beta) = (1/b, 2 - 1/b)$ geldt $\frac{\partial f}{\partial r}(\alpha,\beta) = \kappa^3/(1+\alpha+\beta)^3 - 3\kappa^3 r/(1+\alpha+\beta)^4 = 1 - 1/b$, $\frac{\partial f}{\partial w}(\alpha,\beta) = -3r/(1+\alpha+\beta)^4 = -1/b$, $\frac{\partial g}{\partial r}(\alpha,\beta) = b\beta = 2b-1$ en $\frac{\partial g}{\partial w}(\alpha,\beta) = b\alpha = 1$, is de Jacobi matrix in het evenwicht gelijk aan $\begin{bmatrix} 1-1/b & -1/b \\ 2b-1 & 1 \end{bmatrix}$. Hiermee is het karakteristieke polynoom $(\lambda - 1 + 1/b)(\lambda - 1) + (2 - 1/b) = \lambda^2 - (2-1/b)\lambda + 3 - 2/b$. De eigenwaarden zijn hiervan de nulpunten.

c) Bepaal voor welke waarden van b dit evenwicht stabiel is.
(*Hint: De eigenwaarden kunnen, afhankelijk van b, complex zijn. Toon eerst aan dat het evenwicht stabiel is als de eigenwaarden reëel zijn. Bekijk dan het complexe geval.*)

4 Oplossing. De eigenwaardenvergelijking luidt $\lambda^2 - (2 - 1/b)\lambda = 2/b - 3$.
Dus $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(2 - 1/b \pm \sqrt{(2-1/b)^2 - 4(3-2/b)}) = \frac{1}{2}(2 - 1/b \pm \sqrt{(2+1/b)^2 - 12})$.
Voor stabiliteit moeten de eigenwaarden, in absolute waarde < 1 zijn.
Stel dat de eigenwaarden reëel zijn: $2 + 1/b \geq \sqrt{12} \Leftrightarrow b \leq (1+\sqrt{3})/4$ (we bekijken alleen relevante b: $b \geq 0$). Dan hebben we stabiliteit als $1^2 - (2-1/b)1 > 2/b - 3 \Leftrightarrow b > 1/2$ en $(-1)^2 - (2-1/b)(-1) > 2/b - 3 \Leftrightarrow b > 1/2$ (merk op dat $b \geq 1/2$ de biologisch relevante waarden zijn voor b). Dus als $1/2 < b \leq (1+\sqrt{3})/4$.
Als de eigenwaarden niet reëel zijn ($b > (1+\sqrt{3})/4$), dan is $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ en is $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \lambda_1\lambda_2 = 3 - 2/b < 1 \Leftrightarrow 1 > b$. Dus als $(1+\sqrt{3})/4 < b < 1$.
Stabiliteit als $1/2 < b < 1$. (Voor de 'randgevallen' $b = 1/2$ en $b = 1$ is een stabiliteitsuitspraak door lineariseren niet mogelijk en zouden apart bekeken moeten worden. Dat is hier niet de bedoeling.)

d) Voor welke waarden van b spiraliseert de oplossing in de buurt van het evenwicht naar het evenwicht toe?

1 Oplossing. De oplossing spiraliseert als de eigenwaarden niet reëel zijn, dus als $b > (1+\sqrt{3})/4$. De oplossing gaat in de buurt van het evenwicht naar het evenwicht als het evenwicht stabiel is, dus $1/2 < b < 1$. Gecombineerd (spiraliserend naar het evenwicht), als $1 > b > (1+\sqrt{3})/4$

Opgave 2. In een fietsfabriek worden racefietsen en mountainbikes gemaakt. De netto winst per racefiets is €225 en de netto winst per mountainbike is €300. De fabriek wenst de winst te maximaliseren. Met de beschikbare arbeidskracht kunnen maximaal 800 fietsen per week gemaakt worden en beide types kosten evenveel werk. Met een bepaalde boormachine kan 40 uur per week gewerkt worden. Voor de vervaardiging van een racefiets is de boormachine $\frac{1}{25}^{ste}$ uur nodig en voor een mountainbike tweemaal zo lang. Van een bepaald soort buis zijn 8 eenheden nodig voor een racefiets en 12 eenheden voor een mountainbike. De toelevering vanuit de aluminiumfabriek is maximaal 9400 eenheden per week.

a) Formuleer dit probleem als een lineair programmeringsprobleem.

3 Oplossing. Zij x_1 het aantal racefietsen dat per week gemaakt wordt en x_2 het aantal mountainbikes. Merk op dat $x_1 \geq 0$ en $x_2 \geq 0$: het aantal fietsen dat gemaakt wordt is niet negatief. De winst is dan $225x_1 + 300x_2$ Euro. Omdat er arbeidskracht is voor maximaal 800 fietsen per week, is $x_1 + x_2 \leq 800$. De tijdsrestricties op de boormachine leiden tot $\frac{1}{25}x_1 + \frac{2}{25}x_2 \leq 40$ of, equivalent hiermee, $x_1 + 2x_2 \leq 1000$. De restrictie op het aantal buizen ziet er uit als $8x_1 + 14x_2 \leq 9400$ of, equivalent hiermee, $4x_1 + 7x_2 \leq 4700$. Kortom:
We moeten $\max 225x_1 + 300x_2$ bepalen met x_1, x_2 zodat

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 800 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 1000 \\ 4x_1 + 7x_2 &\leq 4700 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b) Breng het probleem op standaard vorm.

2 Oplossing. Voeren we slack variabelen s_1, s_2, s_3 in, dan ziet het LP probleem er in standaard vorm uit als (versie rechts is in compacte notatie)

$$\begin{aligned} &\max\ 225x_1 + 300x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\ &\quad \text{zodat} \\ &x_1 + x_2 + s_1 = 800 \\ &x_1 + 2x_2 + s_2 = 1000 \\ &4x_1 + 7x_2 + s_3 = 4700 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \quad s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 4700 \\ \hline 225 & 300 & 0 & 0 & 0 & M \end{array}$$

c) Gebruik de simplexmethode om uit te rekenen hoeveel racefietsen en hoeveel mountainbikes de fabriek per week moet produceren om een zo groot mogelijke winst te maken.

3 Oplossing. 1) Vind een feasible hoekpunt: $h = (0, 0, 800, 1000, 2800)^T$. ($h$ voldoet aan de gelijkheden en alle coördinaten van h zijn ≥ 0).
2) We vergroten de waarde van de doelfunctie door de eerste coördinaat van h te vergroten ($j = 1$). We kiezen als pivot $(i, j) = (1, 1)$ (Voor $i = 1$ is de i-do coördinaat van $(800/1, 1000/1, 4700/4)$ minimaal. Vegen levert

1	1	1	0	0	800
0	1	-1	1	0	200
0	3	-4	0	1	1500
0	75	-225	0	0	$M - 800 \cdot 225$

Het nieuwe 'betere' hoekpunt is nu $h = (800, 0, 0, 200, 1500)^T$.
3) We vergroten de waarde van de doelfunctie door de tweede coördinaat te vergroten ($j = 2$). We kiezen als pivot $(i, j) = (2, 1)$ (Voor $i = 2$ is de i-do coördinaat van $(800/1, 200/1, 1300/3)$ minimaal. Vegen levert

1	0	2	-1	0	600
0	1	-1	1	0	200
0	0	-1	-3	1	900
0	0	-150	-75	0	$M - 800 \cdot 225 - 200 \cdot 75$

Het nieuwe 'betere' hoekpunt is nu $h = (600, 200, 0, 0, 900)^T$.
4) Omdat alle coördinaten van de c-vector ≤ 0 zijn, kan de waarde van de doelfunctie niet meer verbeterd worden. Kortom, de doelfunctie wordt gemaximaliseerd met $x_1 = 600$, $x_2 = 200$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ en $s_3 = 900$.

Controleer je antwoord grafisch.

1 Oplossing. Trek in het positief quadrant (d.w.z. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) van het (x_1, x_2)-vlak de drie lijnen $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 800\}$, $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 = 1000\}$, $\{(x_1, x_2) \mid 4x_1 + 7x_2 = 4700\}$. Dan blijkt dat voor $x_1 \geq 0$ en $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 800$ en $x_1 + 2x_2 \leq 1000$ impliceert dat $4x_1 + 7x_2 \leq 4700$. Kortom, deze laatste restrictie is overbodig. Het polygoon in het positieve quadrant dat begrensd wordt door de eerste twee lijnen, heeft vier hoekpunten $(0, 0)$, $(800, 0)$, $(0, 500)$ en $(600, 200)$. Omdat het polygoon begrensd is, wordt het maximum op het polygoon aangenomen in een hoekpunt. Invullen van de vier mogelijkheden leert dat $(600, 200)$ het maximaliserende is.

d) Hoe groot is die winst dan? Geef een interpretatie voor de slack variabelen.

1 Oplossing. De winst is maximaal als wekelijks 600 racefietsen geproduceerd worden en 200 mountainbikes. De winst is dan $225 \cdot 600 + 300 \cdot 200$ $(= 800 \cdot 225 + 200 \cdot 75)$. De arbeidskracht wordt optimaal benut ($s_1 = 0$), evenals de boormachine ($s_2 = 0$). Er worden echter wekelijks 900 buizen ($s_3 = 900$) niet gebruikt, d.w.z., de aluminiumfabriek hoeft wekelijks slechts 8500 buizen te leveren.

Opgave 3. In een analyse van een variant van het Verhulst model waarin een ruimtelijke term (een emigratie term) is opgenomen duikt de volgende differentiaalvergelijking op

$$c\,u' = (a - u)u - bu''.$$

Hierin zijn a, b en c (bekende) positieve constanten en is u een (onbekende) functie van één veranderlijke. We nemen $b = c = 1$, $a > 0$.

a) Laat zien dat met $x \equiv u$ en $y \equiv u'$ geldt

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (a - x)x - y \end{cases}$$

Geef in het (x, y)-vlak aan waar $x' = 0$, respectievelijk, $y' = 0$. Bepaal de evenwichten.

2 Oplossing. $x' = u' = y$, $y' = u'' = \frac{1}{b}[(a-u)u - cu'] = \frac{1}{b}[(a-x)x - cy] = (a-x)x - y$.
$x' = 0$ als $y = 0$ (de horizontale as in het (x, y)-vlak.
$y' = 0$ als $y = (a-x)x$ (een bergparabool met nulpunten in $x = 0$ en $x = a$.)
Evenwichten op de snijpunten van de twee curves (de horizontale as en de bergparabool): dus in $(x, y) = (0, 0$ en $(x, y) = (a, 0)$.

b) Geef een indicatie van het richtingsveld. Uit het richtingsveld kan je de aard van het evenwicht $(0, 0)$ vaststellen. Waarom en wat is de aard van dat evenwicht? Lukt dat ook voor het andere evenwicht? (Motiveer)

3 Oplossing. Voor x en y groot is x' positief en y' negatief. Het richtingsveld is in zo'n punt naar het Zuid-Oosten gericht. Als we over de lijn $y = 0$ stappen verandert de richting van de x-coördinaat van het richtingsveld. Op de lijn is er geen verandering in de x-richting (verticaal pijltje). Als we over de bergparabool lijn $y = (a-x)x$ stappen verandert de richting van de y-coördinaat van het richtingsveld. Op de parabool is er geen verandering in de xy-richting (horizontaal pijltje).
In de buurt van $(0, 0)$ zijn er oplossingen de er naar toe lopen (richtingspijltjes in $(x, y) \approx (0, 0)$, met $x < 0$, $y > 0$ en met $x > 0$ $y < 0$ wijzen naar $(0, 0)$) en die er van af lopen (richtingspijltjes in $(x, y) \approx (0, 0)$, met $x > 0$, $0 < y < (a-x)x$ en met $x < 0$, $(a-x)x < y < 0$ wijzen van $(0, 0)$ af) Dit komt alleen voor bij zadelpunten: $(0, 0)$ is een zadelpunt.
Het richtingsveld in de buurt van $(a, 0)$ geeft aan dat de oplossing rond $(a, 0)$ ''cirkelt''. Dit kan zijn omdat $(a, 0)$ een instabiele spiraal is, een centrumpunt. Zelfs stabiele knoop kan niet uitgesloten worden.

c) Bepaal de aard van het andere evenwicht door linearisatie. Hoe hangt dat van a af?

3 Oplossing. De Jacobi matrix is in (x, y) gelijk aan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a - 2x & -1 \end{bmatrix}$$

Dus voor $(x, y) = (a, 0)$ is dat

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -1 \end{bmatrix}$$

met determinant $d \equiv a > 0$ en spoor $s \equiv -1$. Omdat $d > 0$ en $s < 0$ is het evenwicht stabiel. Als $1 = s^2 > 4d = 4a$ dan (is de bergparabool heel 'plat' en) hebben we te maken met een stabiele knoop en in het andere geval ($a > \frac{1}{4}$) met een stabiele spiraal.
In het punt $(0, 0)$ ($x = 0$) is de determinant van de Jacobi matrix gelijk aan $-a$ en dus < 0. Dit bevestigt onze bewering dat $(0, 0)$ een zadelpunt is.

d) Schets het fase portret voor twee karakteristieke waarden van a (twee plaatjes). Schets voor een van die waarde van a de grafiek van u met $u(0) \approx 0, u(0) > 0$.

2 Oplossing. Voor $a < \frac{1}{4}$ krijgen we in het fase-vlak een 'parabool-achtige' curve van $\approx (0, 0)$ naar $(a, 0)$ (die in $(a, 0)$ 'binnenkomt' vanuit het noordwesten nadat hij de parabool in zuiver oostelijke richting doorsneden heeft. De grafiek van u lijkt op een logistische oplossing.
Voor $a > \frac{1}{4}$ ziet de curve tot dat hij de parabool doorsnijdt uit als in het vorige geval, daarna spiralizeert hij naar $(a, 0)$. De grafiek van u stijgt naar de waarde a en vertoont dan een gedempte schommeling rond deze waarde.

Opgave 4. We bekijken een eenvoudig internet netwerk (WWW) van vijf pagina's. Pagina 1 bevat een link naar de pagina's 2, 4 en 5, pagina 2 linkt naar 3, 3 linkt naar 2, 4 linkt naar 3 en 5 en pagina 5 linkt naar 2. Verder bevatten de pagina's geen links. Dit netwerk kan gevisualiseerd worden als een gerichte graaf. Google ziet deze graaf als graaf van een kansmatrix, zeg $\widetilde{\mathbf{P}}$, waarbij ze in iedere kolom van de matrix de niet-nul coëfficiënten dezelfde waarde geven (de waarde is kolom afhankelijk).

a) Geef deze graaf en stel de matrix $\widetilde{\mathbf{P}}$ op.
Als het niet lukt om de matrix op te stellen mag je de volgende matrix gebruiken:

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2 Oplossing. Met de voor de hand liggende nummering wordt $\widetilde{\mathbf{P}}$ gegeven door

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(Een andere nummering geeft de alternatief $\widetilde{\mathbf{P}}$.)

b) Is de stelling van Perron-Frobenius toepasbaar op deze matrix?

1 Oplossing. De matrix coëfficiënten zijn ≥ 0. Echter de graaf (en dus de matrix) is niet irreducibel: er is geen pad naar het punt 1 (er wordt nergens gelinked naar pagina 1). Dus PF is niet toepasbaar (de absoluut grootste eigenwaarde is ≥ 0, maar PF kan niet garanderen dat die dominant is).

Google kiest een $\alpha \in (0,1)$ en modificeert deze matrix tot $\mathbf{P} \equiv (1-\alpha)\widetilde{\mathbf{P}} + \alpha\frac{1}{5}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$. Hierbij is $\mathbf{1}$ de (kolom) vector in $\mathbb{R}^5$ waarvan alle coördinaten gelijk zijn aan 1. Hiermee is $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ de 5×5 matrix waarvan alle coëfficiënten gelijk aan 1 zijn.

c) Laat (zonder expliciet te rekenen) zien dat $\mathbf{P}$ een dominante eigenvector heeft, zeg $\mathbf{v}_1$. Welke waarde heeft de bijbehorende eigenwaarde λ_1?

3 Oplossing. Alle matrix coëfficiënten van $\mathbf{P}$ zijn > 0. In dit geval is PF toepasbaar en weten we dat er een dominante eigenvector is, zeg $\mathbf{v}_1$, met eigenwaarde λ_1; $\lambda_1 > |\lambda_j|$ voor $j = 2, \ldots, 5$. Verder weten we dat $\mathbf{P}$ een kansmatrix is: alle matrix coëfficiënten zijn ≥ 0 en tellen kolomsgewijs op tot 1 ($\widetilde{\mathbf{P}}$ is een kansmatrix, dus $\mathbf{1}^T\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{1}^T$ en daarmee is $\mathbf{1}^T\mathbf{P} = (1-\alpha)\mathbf{1}^T\widetilde{\mathbf{P}} + \alpha\frac{1}{5}\mathbf{1}^T\mathbf{1}\mathbf{1}^T = (1-\alpha)\mathbf{1}^T + \alpha\mathbf{1}^T = \mathbf{1}^T$. Hierbij gebruikten we dat $\mathbf{1}^T\mathbf{1} = 5$). Van kansmatrices weten we dat 1 een eigenwaarde is en dat voor alle andere eigenwaarden λ_j geldt $|\lambda_j| \leq 1$. Blijkbaar is $\lambda_1 = 1$.

d) Als $\mathbf{v}_j$ een eigenvector van $\mathbf{P}$ bij een andere eigenwaarde λ_j, dus $\lambda_j \neq \lambda_1$, dan is $\mathbf{1}^T\mathbf{v}_j = 0$. Waarom? (*Hint: bedenk dat* $\mathbf{1}^T\mathbf{P} = \mathbf{1}^T$.) Concludeer dat $\mathbf{v}_j$ ook een eigenvector is van $\widetilde{\mathbf{P}}$ en toon aan dat $|\lambda_j| \leq 1 - \alpha$.

3 Oplossing. Beschouw een eigenvector $\mathbf{v}_j$ van $\mathbf{P}$ met eigenwaarde λ_j, $j \neq 1$. Dus $|\lambda_j| < 1$. Omdat $\lambda_j\mathbf{v}_j = \mathbf{P}\mathbf{v}_j$ is $\lambda_j\mathbf{1}^T\mathbf{v}_j = \mathbf{1}^T\mathbf{P}\mathbf{v}_j = \mathbf{1}^T\mathbf{v}_j$ (in het vorige onderdeel hadden we immers gezien dat $\mathbf{1}^T\mathbf{P} = \mathbf{1}^T$ (kansmatrix)). Omdat $\lambda_j \neq 1$ is, kan dit alleen als $\mathbf{1}^T\mathbf{v}_j = 0$. Dit impliceert dat $\lambda_j\mathbf{v}_j = \mathbf{P}\mathbf{v}_j = (1-\alpha)\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{v}_j + \alpha\frac{1}{5}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\mathbf{v}_j = (1-\alpha)\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{v}_j$. Blijkbaar is $\mathbf{v}_j$ een eigenvector van $\widetilde{\mathbf{P}}$ met eigenwaarde $\lambda_j/(1-\alpha)$. Omdat $\widetilde{\mathbf{P}}$ een kansmatrix is, geldt dat $|\lambda_j/(1-\alpha)| \leq 1$ en dus $|\lambda_j| \leq 1 - \alpha$.

Bij 'pageranking' stelt Google het 'belang' van pagina k gelijk aan de waarde van de k-de coördinaat van $\mathbf{v}_1$, waarbij $\mathbf{v}_1$ zo geschaald is dat alle coördinaten optellen tot 1: $\mathbf{1}^T\mathbf{v}_1 = 1$.

e) Verklaar waarom $(\mathbf{x}_n)$, met $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{5}\mathbf{1}$ en $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_n$ alle n, naar $\mathbf{v}_1$ convergeert.

1 Oplossing. Volgens PF kunnen we $\mathbf{v}_1$ zo schalen dat alle coördinaten van $\mathbf{v}_1 \geq 0$. Minstens één coördinaat van $\mathbf{v}_1$ is $\neq 0$. Dus $\mathbf{1}^T\mathbf{v}_1 > 0$ en kunnen we $\mathbf{v}_1$ zo schalen dat alle coördinaten van $\mathbf{v}_1$ optellen tot 1 (deel $\mathbf{v}_1$ door $\mathbf{1}^T\mathbf{v}_1$).
$\mathbf{x}_0$ is een kansvector en daarom is $\mathbf{x}_n$ ook een kansvector (voor alle n). Als $\mathbf{x}_0 = \sum \gamma_j \mathbf{v}_j$ dan $\mathbf{x}_n = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \sum_{j>1} \lambda_j^n \mathbf{v}_j \to \gamma_1\mathbf{v}_1$ voor $n \to \infty$. Immers $|\lambda_j|^n \leq (1-\alpha)^n$ en $1-\alpha \in (0,1)$. Omdat $\mathbf{1}^T\mathbf{x}_n = 1$ en $\mathbf{1}^T\mathbf{v}_1 = 1$ volgt dat $\gamma_1 = 1$. Kortom, voor n groot is $\mathbf{x}_n \approx \mathbf{v}_1$.

Puntentelling.

Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.

Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.