Tentamen Modellen en Simulatie (WISB134)

Woensdag, 27 juni 2012, 13:30-16:30, Educatorium, Beta Zaal

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen dat niet.

Opgave 1. We hebben recentelijk kunnen lezen dat de haringstand in de Noordzee weer op peil is. Er waren alleen wat zorgen over het aantal jonge haringen. Een verklaring werd gezocht in het feit dat haringen haringlarven eten als die onvoldoende schuilplekken kunnen vinden.

Zij x_n het aantal haringlarven en y_n het aantal haringen in jaar n (gemeten op het eind van de lente). We beschouwen het volgende model

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n, \\ y_{n+1} = by_n + cx_n - dx_ny_n. \end{cases}$$

Hierin zijn a, b, c, d bekende positieve constanten. Verder is $b < 1$.

a) Interpreteer de termen by_n en $-dx_ny_n$. Laat door herschalen zien dat we $a = 1$ en $d = 1$ mogen veronderstellen.

We veronderstellen verder dat $a = 1$ en $d = 1$.

b) Bereken de evenwichtsoplossingen.

c) Bepaal de Jacobi matrix van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die de recursie beschrijft.

d) Bepaal de stabiliteit van de evenwichten (hoe hangt dat af van b en c?).

Opgave 2. Een onderneming exploiteert een aantal kampeerterreinen. Men overweegt de inrichting van een nieuw terrein dat een oppervlakte moet krijgen van maximaal 100 ha. Op het terrein zullen aparte afdelingen voor tenten, caravans en kampeerauto's worden gerealiseerd. Uit de beschikbare exploitatiegegevens kan men afleiden dat de gemiddelde opbrengst per maand, per hectare voor tenten, caravans resp. kampeerauto's op respectievelijk €4000,-, €3000,- en €5000,- gesteld kan worden. Uit marktonderzoek heeft men afgeleid dat:

- Tenminste 30 ha van het terrein voor tenten bestemd moet worden.
- De ruimte voor caravans en kampeerauto's samen kleiner moet zijn dan de ruimte voor tenten.
- Niet meer dan 10 ha voor kampeerauto's mag worden ingericht.

Men wenst, gegeven deze informatie, te bepalen welke oppervlakten voor de drie deelterreinen gekozen moet worden opdat de totale opbrengst van het terrein gemaximaliseerd wordt.

a) Formuleer dit vraagstuk als lineaire programmeringsprobleem.

b) Los het probleem op.

Opgave 3. In een zeker gebied is $x(t)$ de gemiddelde hoeveelheid brandnetel op tijdstip t en $y(t)$ de gemiddelde hoeveelheid giftige stof in de bodem die door de brandnetels zelf geproduceerd is. De groei van de brandnetels wordt geremd door zijn eigen gif. In de grond wordt het gif met constante snelheid afgebroken. Er geldt

$$\begin{cases} x' = 2x - xy \\ y' = x - K(y) \end{cases} \qquad \text{waarbij} \qquad K(y) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad y > 0 \\ 0 & \text{als} \quad y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Laat zien dat (afgezien van constanten die we hier voor het verdere rekengemak genormeerd hebben) dit een redelijk model is voor de beschreven situatie. Geef een interpretatie voor de functie K.

b) Bepaal de evenwichtspunten van (1).

Bepaal door linearisatie voor strikt positieve x en y waarden de aard van het evenwicht.

c) Bepaal een functie $F(x, y)$ waarvoor geldt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = y - 2$$

Laat zien dat voor voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ van (1) waarvoor $x(t) > 0$ en $y(t) > 0$ geldt dat $F(x(t), y(t)) =$ constant is.

d) Zij $x_0 > 1$ zodat $x_0 - \ln(x_0) = 3$. Gebruik de functie F uit (c) om, in het relevante deel van het x-y–vlak, de kromme te schetsen van de oplossing van (1) met $x(0) = x_0$ en $y(0) = 2$. (Deze kromme is "ei-vormig" en (1,0) ligt erop). Geef aan in welke richting de oplossing de kromme doorloopt.

e) Schets een oplossingskromme met $x(0) = x_1 > x_0$ en $y(0) = 2$. Ga na wat er gebeurt voor grote waarde van t. Geef een biologische interpretatie.

Opgave 4. Van een gegeven rij $(f_1, \ldots, f_n)$ van reële getallen willen we uitrekenen voor welke waarde van de index i de waarde f_i minimaal is. Via het volgende iteratieve proces produceren we hiertoe een rij (i_k) van indices $i_k \in \{1, \ldots, n\}$. We kiezen eerst $T > 0$. In stap $k = 0$ kiezen we $i_0 = 1$.

Stel in stap k is index i_k gekozen. i_{k+1} wordt in twee sub-stappen als volgt gekozen.

i) Kies eerst $j \in \{i_k - 1, i_k + 1\}$ met kans $\frac{1}{2}$.

Vervang j door n als $j = 0$ en door 1 als $j = n + 1$ (d.w.z. $j \leftarrow j \bmod n$).

ii) Neem $i_{k+1} = j$ als $f_j \leq f_{i_k}$.

Neem $i_{k+1} = j$ met kans $\exp([f_{i_k} - f_j]/T)$ als $f_j > f_{i_k}$.

Neem $i_{k+1} = i_k$ als j niet genomen werd.

Bovenstaand proces kan beschreven worden als een Markov keten

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_k.$$

Hierbij is de i-de coördinaat $\mathbf{p}_k(i)$ van $\mathbf{p}_k$ de kans dat $i_k = i$ en is $\mathbf{P}$ een matrix die afhangt van de gegeven rij van f_i-waarden.

Neem verder $n = 6$ en $(f_1, \ldots, f_6) = (3, 2, 1, 5, 4, 0)$. Dan

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} * & \frac{1}{2}e^{-1/T} & 0 & 0 & 0 & * \\ \frac{1}{2} & * & \frac{1}{2}e^{-1/T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & * & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-4/T} & * & \frac{1}{2}e^{-1/T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & * & \frac{1}{2}e^{-4/T} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix}$$

a) Bepaal $\mathbf{p}_0$.
Geef voor $(i, j) = (1, 1)$ en voor $(i, j) = (1, 6)$ een uitdrukking voor $\mathbf{P}(i, j)$.

b) Laat zien (zonder expliciet te rekenen) dat 1 de dominante eigenwaarde is van $\mathbf{P}$.

Beschouw de vector $\mathbf{q}$ met als i-de coördinaat $\mathbf{q}(i) = \exp(-f_i/T)$. Zij $\mathbf{D}$ de diagonaal matrix met $\mathbf{q}(i)$ als (i, i) element. Merk op dat $\mathbf{D1} = \mathbf{q}$ voor $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \ldots, 1)^T$.

Door invullen kan je nagaan (maar dat hoef je hier niet te doen) dat $\mathbf{PD} = \mathbf{DP}^T$.

c) Toon aan dat $\mathbf{q}$ een dominante eigenvector is van $\mathbf{P}$.
Is $\mathbf{q}$ een kansvector?

d) Laat voor $T = \frac{1}{3}$ zien dat de kans dat op den duur door bovenstaand proces daadwerkelijk $i = 6$ gekozen wordt ongeveer $\frac{19}{20}$ is (hierbij mag je gebruiken dat $\exp(3) \approx 20$).

`Puntentelling.`

`Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.`

`Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.`