# **Tentamen Modellen en Simulatie** (WISB134)

Vrijdag, 17 april 2015, 13:30-16:30, Educatorium Gamma Zaal

---

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, kopieën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden.

---

**Opgave 1**. De haringstand in de Noordzee is vanaf de jaren 70 tot midden jaren 90 van de vorige eeuw zeer onder niveau geweest, maar is daarna weer bijgetrokken. Er waren laatst alleen wat zorgen over het aantal jonge haringen. Een verklaring werd gezocht in het feit dat haringen haringlarven eten als die onvoldoende schuilplekken kunnen vinden.

Zij $x_n$ het aantal haringlarven en $y_n$ het aantal haringen in jaar $n$ (gemeten op het eind van de lente). We beschouwen het volgende model

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ay_n, \\ y_{n+1} &= by_n + cx_n - dx_ny_n. \end{aligned}$$

Hierin zijn $a$, $b$, $c$, $d$ bekende positieve constanten. Verder is $b < 1$.

**a)** Interpreteer de termen $by_n$ en $-dx_ny_n$.

We veronderstellen verder dat $a = 1$ en $d = 1$.

**b)** Bereken de evenwichten.

**c)** Bepaal de Jacobiaan matrix van de functie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die de recursie beschrijft.

**d)** Bepaal de stabiliteit van de evenwichten (hoe hangt dat af van $b$ en $c$?).

**Opgave 2**. Een onderzoeksbureau heeft een eenvoudig economisch model gemaakt met gebruik van Amerikaanse werkloosheidscijfers van de 20e eeuw. Het model gaat er van uit dat de economie in jaar $n$ in één van drie mogelijke toestanden verkeert: (1) normale groei, (2) lichte recessie, (3) zware recessie. Uit de data zijn de volgende trends te herkennen: Na een jaar van normale groei, volgt er weer een jaar met normale groei in 9 op de 10 jaren, en anders een jaar van lichte recessie. Na een jaar van lichte recessie, volgt er: een jaar van normale groei in 2 op de 10 jaren, een zware recessie in 1 op de 10 jaren, en anders weer lichte recessie. Na een jaar van zware recessie blijft de economie in 5 op de 10 jaren in recessie, en anders herstelt het zich naar lichte recessie.

**a)** Stel een Markovketen met kansmatrix (transitiematrix) $P$ op, die dit model beschrijft, en teken de graaf van $P$. Als het je niet lukt om de matrix op te stellen, ga verder met de volgende matrix:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{8}{10} & \frac{4}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{6}{10} \end{bmatrix}.$$

**b)** Maak gebruik van de graaf om te bepalen in hoeverre de stelling van Perron-Frobenius van toepassing is op $P$. Toon aan dat het model een stabiel evenwicht heeft. Als een Amerikaanse president twee keer gekozen wordt, en dus 8 jaar in het Witte Huis blijft, hoeveel jaren van economisch normale groei kan die gemiddeld verwachten?

**c)** Als er in een verkiezingsjaar zware recessie is, wordt er meestal een nieuwe president gekozen. Wat is de kans dat er 3 jaar later, wanneer de campagnes opnieuw beginnen, normale groei is?

**d)** Leg uit hoe je het antwoord op de volgende vraag kan berekenen (maar je hoeft de berekening dus niet uit te voeren): Hoe lang duurt het gemiddeld na een zware recessie, voordat er voor het eerst weer normale groei is?

**Opgave 3**. Wij spreken van een harmonische oscillatie als een systeem stabiel lineair oscillerend gedrag toont. Een eenvoudig model van harmonische oscillatie is

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\omega^2 x \end{aligned} \tag{1}$$

**a)** Bepaal het evenwicht en de eigenwaarden van de Jacobiaan bij het evenwicht. Wat kun je concluderen over de stabiliteit van het evenwicht aan de hand van de eigenwaarden?

Wij hanteren de volgende definitie van een stabiel evenwicht: Een evenwicht $\alpha : f(\alpha) = 0$ van een differentiaalvergelijking $z' = f(z)$ is stabiel in de zin van Lyapunov als er voor elk $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is, zodanig dat voor alle beginwaarden $z(0) = z_0$ waarvoor geldt $\|z_0 - \alpha\| < \delta$, de oplossing voor voor alle $t > 0$ voldoet aan $\|z(t) - \alpha\| < \varepsilon$.

**b)** Beschouw de functie $H(x, y) = \frac{1}{2}\left(\omega^2 x^2 + y^2\right)$. Gebruik de differentiaalvergelijking om te laten zien dat wanneer $(x(t), y(t))$ een oplossing is van (1), de functie $h(t) = H(x(t), y(t))$ constant is (Hint: laat zien dat $\frac{dh}{dt} = 0$ als $x(t)$ and $y(t)$ voldoen aan de differentiaalvergelijkingen). Hoe zien de functies $H(x, y) = \textit{constante}$ in de $(x, y)$-vlak eruit? Beargumenteer aan de hand hiervan dat het evenwicht stabiel is volgens de bovenstaande definitie.

**c)** Stel dat het model van harmonische oscillatie numeriek wordt opgelost met gebruik van de methode van Euler:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \tau y_n \\ y_{n+1} &= y_n - \tau\omega^2 x_n \end{aligned}$$

Met gebruik van eigenwaarde analyse, onder welke restrictie aan de stapgrootte $\tau$ is het evenwicht van deze recursie stabiel?

**d)** Stel dat het model van harmonische oscillatie numeriek wordt opgelost met gebruik van de trapeziumregel (iets anders opgeschreven):

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} &= \frac{y_{n+1} + y_n}{2} \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} &= -\omega^2 \left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}\right) \end{aligned}$$

Laat zien dat voor deze methode geldt $H(x_{n+1}, y_{n+1}) = H(x_n, y_n)$ (Hint: door te schalen en van elkaar af te trekken, elimineer de termen aan de rechter kant van beide vergelijkingen). Wat kun je hieruit concluderen over de stabiliteit van het evenwicht en eventuele restrictie aan de stapgrootte $\tau$ bij de trapeziumregel?