HERTENTAMEN MODELLEN EN SIMULATIE

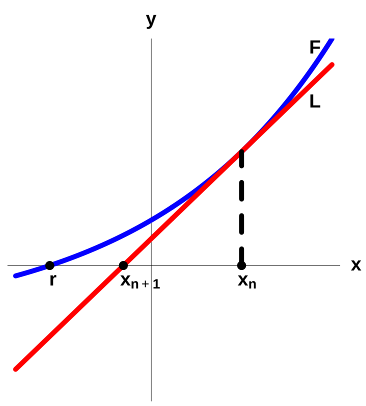
Dinsdag 22 augustus 2000, 14.00–17.00 uur.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen van ongelijk gewicht. De waardering per vraag en per (verplicht) onderdeel staat aangegeven in de kantlijn. Onderdelen voorzien van het symbool ☞ zijn facultatief. Door deze vragen correct te beantwoorden kun je bonuspunten verdienen (de totaalscore kan echter niet hoger zijn dan 10). Verdeel je tijd goed over alle vragen. *Sla de bonusvragen in eerste instantie over. Beantwoord ze alleen als je tijd over hebt!*
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

(20) **1.** The *methode van Newton* is een iteratieve formule waarmee numerieke oplossingen van een vergelijking $f(x)=0$ bepaald kunnen worden voor een gegeven functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, uitgaande van een startpunt x_0 in de buurt van de gezochte oplossing. De methode werkt als volgt. Laat F de grafiek zijn van de functie f, en L de raaklijn aan deze grafiek in het punt $(x_n, f(x_n))$, waarbij $x_n \in \mathbb{R}$ een benadering is van de gezochte oplossing r. Een (hopelijk!) betere benadering x_{n+1} wordt nu geconstrueerd door L te snijden met de x-as; zie Figuur 1.



Figuur 1: De grafieken F en L. De x-coordinaat van het snijpunt van F met de $x-as$ is de gezochte oplossing r waarvoor geldt $f(r)=0$.

(5) **a.** Laat zien dat de aldus geconstrueerde recurrente betrekking gegeven wordt door

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

(5) **b.** Zij r een evenwichtspunt van bovenstaande recursie en neem aan dat $f'(r) \neq 0$. Laat zien dat r in dat geval inderdaad een nulpunt is van f. Onder welke voorwaarde is dit punt stabiel/instabiel?
(*Hint:* Schrijf de recursie als $x_{n+1}=g(x_n)$.)

(5) **c.** (Gebruik bijgevoegd grafiekpapier.) Maak een schets van het pad $x_0 \to x_1 \to x_2 \ldots$ op bijgevoegd grafiekpapier. Toon vervolgens aan de hand van een geschikt gekozen functie aan dat Newton's methode niet altijd werkt.
(*Hint:* Vraag je af *waarom* de methode bij de geschetste grafiek "werkt". Zie ook onderdeel **b**.)

(5) **d.** Een bekende methode om de wortel van een positief getal A te benaderen is de recursie

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)\,.$$

Laat zien dat dit een speciaal geval is van Newton's methode.
(*Hint:* Kies een geschikte functie f welke $\sqrt{A}$ als nulpunt heeft.)

☞ **e.** Zie onderdeel **d**. Stel een analoge recursie op voor het iteratief benaderen van $\sqrt[k]{A}$ voor willekeurige $k=1,2,3,\ldots$

(**30**) **2.** De omvang van de wereldbevolking op 22 augustus 2000 ($t = 0$) bedraagt om en nabij $N=6\,100$ miljoen mensen. We veronderstellen dat de omvang van de wereldbevolking $x(t)$ op tijdstip t voldoet aan de logistische vergelijking

$$(\star) \qquad \frac{dx}{dt} = \alpha\, x\left(1 - \frac{x}{M}\right)\,.$$

Hierin zijn α en M positieve constanten. Populatie x en tijd t worden hierbij gerekend in miljoenen, respectievelijk jaren.

(5) **a.** Geef een interpretatie van de betekenis van α en M in dit model.

(5) **b.** Als $M \gg N$ zouden we de oplossing kunnen benaderen door $M = \infty$ te nemen. Los de vergelijking op uitgaande van deze benadering onder de beginvoorwaarde $x(0) = N$. Binnen welk tijdsinterval is dit een redelijke benadering, denk je? (Een beargumenteerde schatting voor dit tijdsinterval volstaat.)

(10) **c.** De oplossing van de exacte vergelijking $(\star)$ onder beginvoorwaarde $x(0)=N$ is

$$x(t) = \frac{M\,N}{N+(M-N)e^{-\alpha t}}\,.$$

Bewijs dit op *twee* manieren:

- door $x(t)$ te substitueren in de d.v. $(\star)$, respectievelijk

- door de d.v. op te lossen met de methode van "scheiding van variabelen".

(5) **d.** Men schat dat er in het komend jaar wereldwijd zo'n $g = 87$ miljoen mensen bijkomen. Zo'n 70 jaar geleden (op tijdstip $t_* = -70$) telde de wereldbevolking $K = 2\,000$ miljoen zielen. Leid uit deze gegevens vergelijkingen af voor de onbekende parameters α en M in termen van de variabelen g, N, K, t_* *zonder* daarbij hun numerieke waarden te gebruiken.
(*Hint:* Benader de groei in het komend jaar, $\Delta x = x(1) - x(0)$, door de instantane groei op $t = 0$, $\dot{x}(0)$.)

(5) **e.** Een numerieke oplossing voor het stelsel vergelijkingen uit onderdeel **d**, uitgaande van de data $g = 87$, $N = 6\,100$, $K = 2\,000$ en $t_* = -70$, wordt gegeven door $\alpha \approx 0.0186$ en $M \approx 26\,286$. Gebruik deze waarden om te voorspellen wanneer de wereldbevolking zich zal hebben verdubbeld ten opzichte van het huidige aantal. (Ter vergelijking: Volgens een recente verklaring van de *US National Academy of Sciences* en de *British Royal Society* wordt een verdubbeling van de wereldbevolking verwacht rond het jaar 2050.)

(25) 3. Een projectiel wordt vanaf de maan verticaal omhoog geschoten met *ontsnappingssnelheid* v, dat wil zeggen met de minimale snelheid die nodig is om aan de zwaartekracht van de maan te ontsnappen. Aangezien de maan geen atmosfeer heeft ondervindt het projectiel geen weerstand. We verwaarlozen de zwaartekracht van andere hemellichamen dan de maan zelf. Deze laatste wordt gegeven door

$$(\dagger) \qquad F_z(r) = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,,$$

waarbij r de afstand van het projectiel is tot het middelpunt van de maan en G de universele gravitatieconstante. Verder is M de massa van de maan, R de straal van de maan en m de (constant veronderstelde) massa van het projectiel.

(5) **a.** Veronderstel dat v afhangt van m, M, G en R. Geef de SI-eenheden (m, s, kg, enzovoort) van deze grootheden. Toon door middel van dimensionele analyse aan dat er een relatie bestaat van de vorm

$$F\left(\frac{m}{M}, \frac{v^2 R}{GM}\right) = 0\,,$$

voor één of andere functie $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (waarvan de precieze vorm er hier niet toe doet).
(*Hint:* De SI-eenheid van G is $[G] = \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$.)

(5) **b.** Beargumenteer dat $v \propto \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$. Wat kun je zeggen over de evenredigheidsconstante?

(5) **c.** De bewegingsvergelijking voor de baan van het projectiel luidt

$$\left\{\begin{array}{rcl} m\,\ddot{r} & = & F_z(r) \\ r(0) & = & R \\ \dot{r}(0) & = & v\,, \end{array}\right.$$

met $F_z(r)$ zoals gedefiniëerd in $(\dagger)$. Toon middels integratie aan dat de energiefunctie

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2(t) - G\,\frac{mM}{r(t)}$$

onafhankelijk is van t (energiebehoud).
(*Hint:* Vermenigvuldig linker- en rechterlid van de d.v. met $\dot{r}$.)

(5) **d.** Zie onderdeel **c**: Beargumenteer dat voor het projectiel geldt $E = 0$.
(*Hint:* Denk goed na over de definitie van "ontsnappingssnelheid".)

(5) **e.** Bepaal v in termen van m, M, G en R, gebruikmakend van **c** en **d**. Vergelijk je antwoord met onderdeel **b**. Wat valt je op?

(25) **4.** Een aantal studenten doet verwoede pogingen een voldoende te halen voor het eerstejaars vak "Modellen en Simulatie". Sommigen slagen daar reeds na één tentamen in, anderen pas na een (aantal) hertentamen(s). De docent wil het tentamen enerzijds niet te gemakkelijk maken, maar anderzijds ook voorkomen dat hij teveel hertentamens moet nakijken. Hij schat dat driekwart van de studenten voor het tentamen slaagt en acht deze kans even groot voor de deelnemers aan eventuele hertentamens.

(5) **a.** Beargumenteer dat deelnemen aan een (her)tentamen geïnterpreteerd kan worden als een Markovketen met twee mogelijke toestanden: *toestand 1* $\equiv$ GESLAAGD, respectievelijk *toestand 2* $\equiv$ NIET GESLAAGD, met bijbehorende kansmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(5) **b.** Teken de graaf behorend bij P. Is deze (ir)reducibel, (a)periodiek? Bepaal ook de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix P.

(10) **c.** Bewijs met volledige inductie dat

$$P^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 4^{-k} \\ 0 & 4^{-k} \end{pmatrix}.$$

Hoe groot is de kans dat een student na drie tentamenpogingen nog steeds niet geslaagd is?

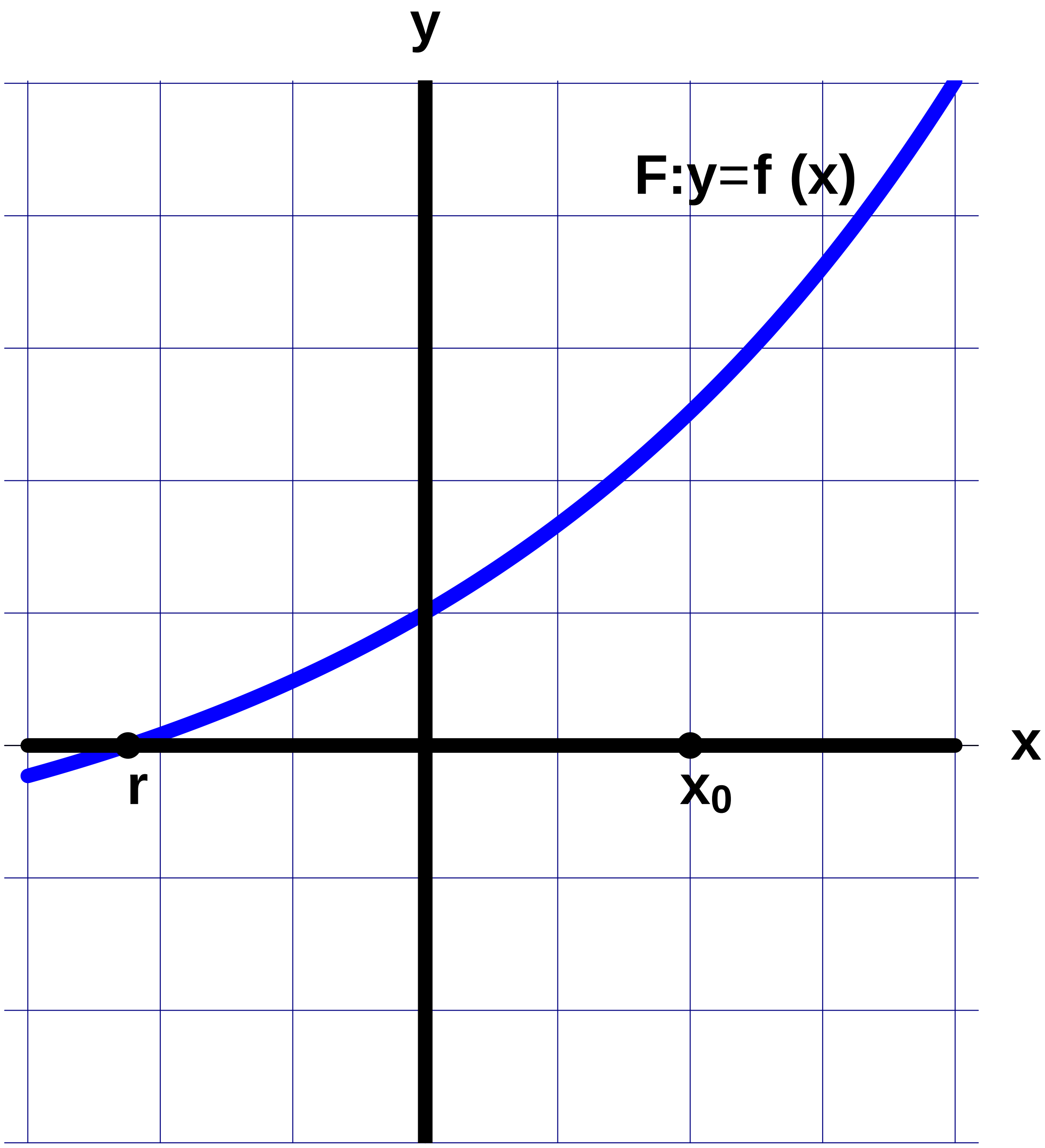
(5) **d.** Beschouw een initiële toestand beschreven door een willekeurige kansvector $\vec{q}$. Bepaal $\lim_{k\to\infty} P^k \vec{q}$ en geef een interpretatie van het resultaat.

☞ **e.** Hoeveel pogingen (tentamen en hertentamens) moet een student *gemiddeld* ondernemen om voor het vak te slagen?
(*Hint:* Beschouw de defectieve kansmatrix $\widetilde{P}$ verkregen uit P door de eerste kolom op nul te zetten. Welke overgang(en) sluit je hiermee uit?)

EINDE

HERTENTAMEN MODELLEN EN SIMULATIE

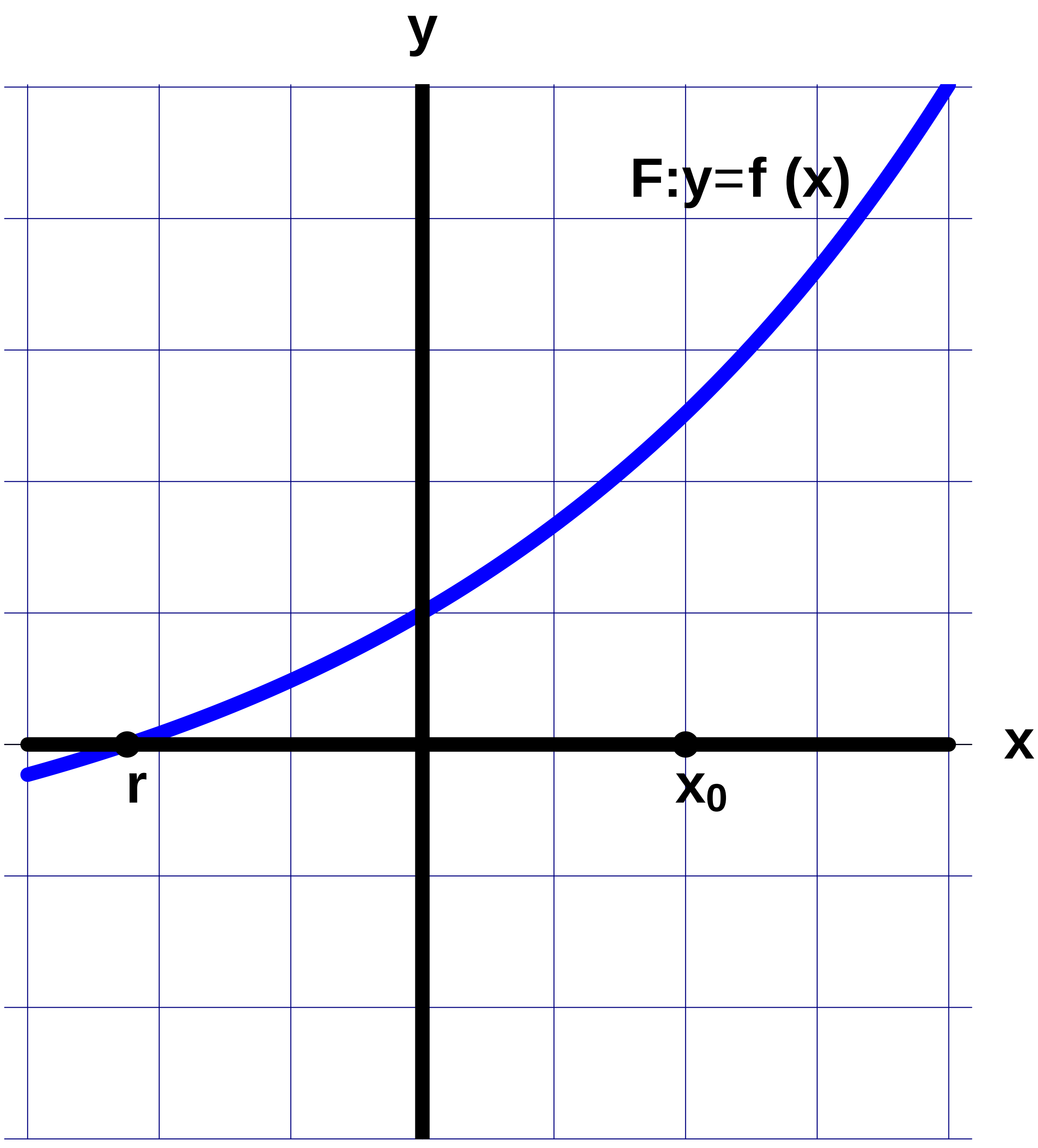
Dinsdag 22 augustus 2000, 14.00–17.00 uur.



Figuur 2: Grafiek $F: y = f(x)$, nulpunt r en startpunt x_0.

HERTENTAMEN MODELLEN EN SIMULATIE

Dinsdag 22 augustus 2000, 14.00–17.00 uur.



Figuur 2: Grafiek $F : y = f(x)$, nulpunt r en startpunt x_0.