Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-355b werd in 2008-2009 gegeven door Schot.

Thermische Fysica 2 (NS-355b)
4 november 2008

1. Begin iedere opgave op een nieuw vel.
2. Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters en op het eerste vel bovendien uw adres, postcode en studierichting.
3. Schrijf duidelijk; onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!
4. Schrijf bij elk antwoord een duidelijke argumentatie op.
5. Gebruik van het boek *Thermal Physics* van Kittel & Kroemer tijdens het tentamen is toegestaan. Andere boeken niet.

Opgave 1: Een-dimensionaal Ising-model

a) We beschouwen allereerst een systeem van N onderscheidbare deeltjes die ofwel energie $E_0 = 0$ hebben ofwel energie $E_1 > 0$. (Denk bijvoorbeeld aan atomen in een vaste stof die zich in de grondtoestand of aangeslagen toestand kunnen bevinden.) Laat zien dat de kanonieke partitiesom van het systeem gegeven wordt door

$$Z = (1 + e^{-\beta E_1})^N$$

met $\beta = 1/(k_B T)$.

b) Bereken de gemiddelde energie per deeltje als functie van de temperatuur. Vervolgens beschouwen we het een-dimensionale Ising model. Op een een-dimensionale keten met $N+1$ plaatsen bevindt zich op elke plaats, aangeduid met index j, een klassieke spin s_j die de twee waarden $s_j \in \{+1, -1\}$ kan aannemen. De hamiltoniaan wordt gegeven door

$$H = -J \sum_{j=1}^{N} s_j s_{j+1}$$

waarbij de constante J groter dan nul is.

c) Herschrijf de hamiltoniaan in termen van de variabelen $\sigma_j = (1 - s_j s_{j+1})/2$, die de waarden één of nul kan aannemen.

d) Bereken de kanonieke partitiesom voor het een-dimensionale Ising model, eventueel gebruikmakend van de resultaten van a) en c) van deze opgave.

e) Geef de entropie per spin in de hoge-temperatuurlimiet ($T \to \infty$). (NB: dit kan zonder berekening!) Geef ook de entropie per spin in de hoge-temperatuur limiet indien elke spin drie waarden, $s_j \in \{+1, 0, -1\}$, i.p.v. twee waarden aan kan nemen.

1 Opgave 2: Fermi gas in een magneetveld

We beschouwen een ideaal Fermi gas en laten om te beginnen eventuele interne vrijheidsgraden van de deeltjes buiten beschouwing. Het gemiddeld aantal deeltjes wordt gegeven door

$$\langle N \rangle = \sum_k N(\epsilon_k)$$

met

$$N(\epsilon_k) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu) + 1}}$$

de Fermi-Dirac distributie functie met $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 \mathbf{k}^2/(2m)$ de één-deeltjes energie. De impuls kan de waarden $\mathbf{k} = 2\pi/L(n_x, n_y, n_z)$ aannemen met n_x, n_y en n_z gehele getallen. De Fermi energie wordt gedefinieerd door $\epsilon_F \equiv \mu(T = 0)$.

a) Geef de Fermi energie in termen van de dichtheid $n = \langle N \rangle / V$, met $V = L^3$ het volume van het systeem. Vervolgens beschouwen we een spin-$\frac{1}{2}$ Fermi gas in een homogeen Zeeman magneetveld. Dit betekent dat de één-deeltjes energie verandert volgens

$$\epsilon_{\mathbf{k},\uparrow} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu_B B$$

voor deeltje met spin parallel aan het magneetveld B (μ_B is het Bohr magneton). Deeltjes met spin tegengesteld aan het magneetveld hebben één-deeltjes energie

$$\epsilon_{\mathbf{k},\downarrow} = \epsilon_{\mathbf{k}} + \mu_B B$$

b) Laat zien dat tot op eerste orde in het magneetveld de magnetizatie dichtheid $M \equiv n_\uparrow - n_\downarrow$ ($n_\uparrow$ is het aantal deeltjes met spin parallel aan het magneetveld, $n_\downarrow$ idem met spin tegengesteld) wordt gegeven door

$$M = -2\mu_B B \int_0^\infty d\epsilon D(\epsilon) \frac{\partial N}{\partial \epsilon}$$

de $D(\epsilon)$ de toestandsdichtheid. Geef $D(\epsilon)$.

c) Bereken de susceptibiliteit $\chi = \frac{\partial M}{\partial B}$ voor $B \to 0$. Laat zien dat in de limiet dat de temperatuur naar nul gaat $\chi = 2\mu_B D(\epsilon_F)$.

d) Laat zien dat in de klassieke limiet geldt dat $\chi = 2\mu_B \langle N \rangle / (k_B T)$.

e) Maak, zonder verdere berekeningen, een schets van de susceptibiliteit bij vaste $\langle N \rangle$ als functie van de temperatuur voor een Fermi gas van spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes en een klassiek gas van spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes. Schets beide curves in één figuur.