Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college TF2b werd in 2001/2002 gegeven door dr. ir. A.F.M. Arts.

Thermische Fysica 2b (TF2b)
21 december 2001

Opmerking: U heeft de keuze om opgave 3 of opgave 4 te maken, echter niet beide.

Opgave 1: Statistiek van identieke deeltjes *(30 punten)*

a) Veronderstel dat we een systeem hebben van twee identieke atomen in contact met een warmtereservoir met temperatuur τ. De energieën van de ééndeeltjestoestanden zijn $0, \epsilon$ en 2ϵ, waarbij het hoogste niveau tweevoudig ontaard is. Bereken de toestandssom Z voor de drie situaties dat (1) de deeltjes fermionen zijn (2) de deeltjes bosonen zijn (3) de deeltjes onderscheidbaar zijn.

b) Geef een fysisch voorbeeld van hoe de deeltjes identiek maar toch onderscheidbaar kunnen zijn.

c) Bij de beschrijving van een ideaal gas wordt geen onderscheid gemaakt tussen bosonen en fermionen. Onder welke temperatuur is deze beschrijving niet meer geoorloofd? Bij de verklaring dient het kwantumvolume betrokken te worden.

Opgave 2: Roostergassen *(35 punten)*

Roostergassen zijn modellen waarbij de posities van de atomen in een gas discreet zijn; de atomen kunnen zich alleen bevinden op posities in een 2 of 3-dimensionaal rooster, zoals damstenen op een dambord. Er kunnen geen meerdere atomen op dezelfde plaats zitten. Deze modellen worden veel gebruikt voor simulaties van gassen en vloeistoffen. We nemen aan dat er M posities in het rooster zijn. Als een plaats bezet is door een atoom bedraagt de bindingsenergie $-\epsilon$. Het roostergas is in thermisch en chemisch evenwicht met een groot reservoir van deeltjes met fundamentele temperatuur $\tau = k_B T$ en chemische potentiaal μ. In dit vraagstuk willen we uitrekenen hoeveel atomen er zich gemiddeld $\overline{N}$ bij gegeven temperatuur in het rooster bevinden.

a) Bereken voor gegeven τ en μ de Gibbs toestandssom Z_{gr} van het rooster en hieruit het aantal atomen $\overline{N}$ in het rooster (controle: voor $\mu = -\epsilon \overline{N} = \frac{M}{2}$).

b) Bereken Z_{gr} en $\overline{N}$ indien op elke roosterplaats een atoom ook een harmonische trilling kan uitvoeren met energiewaarden $E_n = n\hbar\omega + \frac{1}{2}$ met $n = 0, 1, 2, \ldots$.

c) Heeft het zin om bij deze roostergassen onderscheid te maken of de deeltjes fermionen of bosonen zijn? (Ja/nee antwoord voldoet niet)

Opgave 3: Witte dwergen *(35 punten)*

Witte dwergen zijn sterren met een dusdanig hoge dichtheid dat het elektronengas een Fermigas wordt. We nemen aan dat er N elektronen zijn met massa m in een bol met straal R. De energie van veel elektronen is zo groot dat de snelheden relativistisch worden en de energie in goede benadering gegeven wordt door $\epsilon = pc$, met p de grootte van de impuls. Er geldt de relatie van Broglie $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$.

a) Laat zien dat de toestandsdichtheid van het elektronengas gegeven wordt door $D(\epsilon) = A\epsilon^2$ en bereken de constante A. Om de energieën van de elektrontoestanden te berekenen mag de sterbol vervangen worden door een kubus met ribbe R.

b) Bereken de Fermi-energie van het gas.

c) Bereken de energie van het gas.

d) Door invullen van numerieke waarden blijkt dat voor een ster met een diameter van 6000 km de Fermi-energie overeenkomt met een temperatuur van $2 \cdot 10^9$ K. De werkelijke temperatuur van de ster is 10^7 K. Maak een schatting van het percentage elektronen met een energie groter dan de Fermi-energie.

Opgave 4: Bose-Einsteincondensatie *(35 punten)*

Behandel voor een driedimensionaal gas van bosonen in een kubus hoe Bose-Einstein condensatie tot stand komt. Elementen die in de behandeling moeten, zijn de toestandsdichtheid van het gas, de grootte van de chemische potentiaal bij lage temperaturen, het aantal geëxciteerde bosonen, de definitie van de condensatietemperatuur.

Formuleblad

Ideaal gas: $PV = NkT$, Energie $U = \frac{f}{2}NkT$, f aantal vrijheidsgraden
$k_B = 1.38 \times 10^{-23} J/K, N_A = 6.02 \times 10^{-23}, \hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ Js, $c = 2.99 \times 10^8$
Fundamentele temperatuur $\tau = k_B T$; Fundamentele entropie $\sigma = S/k_B$
Eerste hoofdwet thermodynamica: $\Delta U = Q + W$
Adiabatische processen: $PV^\gamma = \text{constant}, \gamma = \frac{5}{3}$.
Soortelijke warmte: $C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$
Thermodynamische identiteit: $dU = \tau d\sigma - PdV + \mu dN$
Entropie: $\sigma = \ln \Omega(U, N, V)$
Stirling benadering: $\ln N! = N \ln N - N$
Thermisch evenwicht: definitie temperatuur: $\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial U}\right)_{V,N}$
Mechanisch evenwicht: definitie druk: $P = \tau \left(\frac{\partial \sigma}{\partial V}\right)_{U,N}$
Chemisch evenwicht: definitie chemische potentiaal: $\mu = -\tau \left(\frac{\partial \sigma}{\partial N}\right)_{U,V}$
Gemiddelde waarde: $< x >= \sum_s x(s)p(s)$
Toestandssom: $Z = \sum_s \exp(-E_s/\tau)$
Boltzmann bezettingskans: $p(s) = \frac{1}{Z}\exp(-E_s/\tau)$
Gemiddelde energie: $U = \tau^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \tau}$
Vrije energie: $F = U - \tau\sigma = -\tau \ln Z$
$\sigma = -\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{V,N}, P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}, \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T}$
Ideaal gas: $\mu = -\tau \ln\left(\frac{Z_{int}}{n v_Q}\right)$;, kwantumvolume $v_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m\tau}}\right)^3$, dichtheid n.
Stefan-Boltzmann: $\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3}\tau^4$
Planck stralingswet: $u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/\tau)-1}$.
Gibbs som $Z_{gr} = \sum_s \exp[(\mu N_s - E_s/\tau)]$, som over alle toestanden, inclusief alle waarden voor N.
Gibbs bezettingskans: $p(s) = \exp[(\mu N_s - E_s)/\tau]/Z_{gr}$
Gemiddeld aantal deeltjes: $N = \tau \frac{\partial \ln Z_{gr}}{\partial \mu}$
Distributiefuncties: $n_{F,D,BE} = \frac{1}{\exp((\epsilon - \mu)/\tau) \pm 1}$