NS-356b-

INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA
UNIVERSITEIT UTRECHT

TENTAMEN QUANTUM MECHANICA 2

Donderdag 5 november 2009, 10.00-12.00 uur

1) Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters, en op het eerste vel bovendien uw adres, postcode en studierichting.

2) Schrijf duidelijk. Onduidelijk schrift wordt niet nagekeken!

3) Alleen het boek *Modern Quantum Mechanics* mag bij het tentamen gebruikt worden.

Opgave: Spin-1/2 in een magneetveld

Beschouw een (electrisch neutraal) deeltje met spin 1/2 in een eventueel tijdsafhankelijk magneetveld $\mathbf{B}(t)$. We beschouwen in het vervolg alleen de spin vrijheidsgraad van het deeltje en verwaarlozen verder de ruimtelijke beweging van het deeltje. De Hamiltoniaan van het deeltje wordt dan

$$\hat{H}(t) = -\frac{\mu}{\hbar}\mathbf{B}(t)\cdot\hat{\mathbf{S}}, \tag{1}$$

met $\mu/2$ het magnetisch moment van het deeltje en $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ de vector van spinoperatoren.

We beschouwen allereerst een tijdsonafhankelijk magneetveld in het x-z vlak van de vorm $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ met $B_x > 0$. De meest algemene toestand van het systeem is nu te schrijven als $|\Psi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle$ met $|\pm\rangle$ de eigentoestanden van $\hat{S}_z$ met eigenwaarde $\pm\hbar/2$, respectievelijk,

a) Laat zien dat de Schrödinger vergelijking

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle,$$

equivalent is aan de matrix vergelijking

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{H}|+\rangle & \langle +|\hat{H}|-\rangle \\ \langle -|\hat{H}|+\rangle & \langle -|\hat{H}|-\rangle \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

b) Laat zien dat de vier relevante matrixelementen van de Hamiltoniaan als functie van B_x en B_z gelijk zijn aan

$$\begin{pmatrix} \langle +|\hat{H}|+\rangle & \langle +|\hat{H}|-\rangle \\ \langle -|\hat{H}|+\rangle & \langle -|\hat{H}|-\rangle \end{pmatrix} = -\frac{\mu}{2}\begin{pmatrix} B_z & B_x \\ B_x & -B_z \end{pmatrix}.$$

c) Bepaal de energieniveau's $E_\sigma(\mathbf{B})$ van het systeem door oplossingen van vergelijking (2) van de vorm

$$\begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} = e^{-iE_\sigma t/\hbar}\begin{pmatrix} c_{\sigma,+} \\ c_{\sigma,-} \end{pmatrix}$$

te zoeken. Maak een schets van deze energieniveau's als functie van $-\infty < B_z < \infty$ bij een vaste $B_x > 0$. Doe dit laatste ook als het u niet gelukt is de energieniveau's E_σ analytisch te bepalen.

d) Geef de eigenvectoren $\mathbf{c}_\sigma(\mathbf{B}) = (c_{\sigma,+}(\mathbf{B}), c_{\sigma,-}(\mathbf{B}))$ als functie van B_z bij een vaste $B_x > 0$. Als het u niet gelukt is de energieniveau's E_σ analytisch te bepalen, geef dan de eigenvectoren als functie van E_σ. Becommentarieer in het bijzonder uw resultaat voor $B_z \to \pm\infty$ en voor $B_z = 0$.

e) Bepaal voor de eigentoestanden die u gevonden hebt in onderdeel d) de gemiddelde spin vector $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle$. Becommentarieer wederom in het bijzonder uw resultaat voor $B_z \to \pm\infty$ en voor $B_z = 0$.

We beschouwen nu een tijdsafhankelijk magneetveld in het x-z vlak van de vorm $\mathbf{B}(t) = (B_x, 0, B_z(t))$ met $B_x > 0$ constant. We nemen bovendien nu $B_z(t) = B'_z t$, waarbij de tijdsafgeleide van het magneetveld B'_z zo klein is dat aangenomen mag worden dat het systeem nooit een overgang van één instantane eigentoestand, d.w.z. een eigentoestand van $\hat{H}(t)$ corresponderend met een eigenvector $\mathbf{c}_\sigma(\mathbf{B}(t))$ voor het instantane magneetveld $\mathbf{B}(t)$, naar een andere instantane eigentoestand maakt gedurende de tijdsevolutie.

f) Als het systeem voor $t \to -\infty$ in de toestand $|+\rangle$ zit, wat is dan de kans dat het systeem voor $t \to \infty$ in de toestand $|-\rangle$ zit? Beargumenteer uw antwoord.

g) Geef ook de golffunctie $|\Psi(t)\rangle$ voor dit geval.