TENTAMEN QUANTUMMECHANICA II
14 AUGUSTUS 1997, 14:00-17:00

1. Maak iedere opgave op een apart vel.
2. Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters en op het eerste vel bovedien uw adres, postcode en studierichting.
3. Schrijf duidelijk; onduidelijk schrift wordt niet nagekeken.
4. Verdeel uw tijd evenredig over de drie opgaven
5. Het gebruik van literatuur is *niet* toegestaan

Opgave 1 Electronen in een tweedimensionale harmonische oscillator

Gegevens:
De 1-dimensionale harmonische oscillator heeft een volledige set van eigentoestanden $|n\rangle$,$n = 0, 1, 2, ...$ waarvoor geldt:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$$

met a de annihilatie-operator.

In deze opgave beschouwen we een electron dat zich in *twee* dimensies beweegt (in het xy-vlak) onder invloed van een harmonische potentiaal. De Hamiltoniaan van het electron wordt dus gegeven door:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_x^2 + \hat{x}_y^2\right)$$

Zoals bekend kan $\mathcal{H}_0$ ook geschreven worden in termen van creatie- en annihilatie-operatoren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= (a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1)\hbar\omega \\
a_x &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right) \\
a_y &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{y} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_y\right)
\end{aligned}$$

a) Laat zien dat voor de eigenwaarden van $\mathcal{H}_0$ geldt: $E_n^{(0)} = (n+1)\hbar\omega,\ n = 0, 1, 2, ...$ en dat de ontaardingsgraad van $E_n^{(0)}$ gegeven wordt door $2n + 2$ (Bedenk dat het elektron een spin-$\frac{1}{2}$deeltje is.)

Vervolgens brengen we de spin-baan koppeling in de rekening, zodat de Hamiltoniaan van het electron gegeven wordt door: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$, met

$$V = \alpha L_z S_z, \quad \alpha > 0.$$

b) Leidt af dat geldt $L_z = i\hbar(a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y)$.

c) Bereken met (ontaarde) storingsrekening de correcties op het eerste aangeslagen niveau ($E_1^{(0)} = 2\hbar\omega$) ten gevolge van de storing V.

In de rest van de opgave beschouwen we een systeem van *twee* niet-wisselwerkende electronen in een twee-dimensionale harmonische oscillator. Wanneer we spin-baankoppeling verwaarlozen, wordt de Hamiltoniaan van dit systeem dus (in een voor de hand liggende notatie):

$$\mathcal{H}_{\text{sys}} = (a_{1,x}^\dagger a_{1,x} + a_{1,y}^\dagger a_{1,y} + a_{2,x}^\dagger a_{2,x} + a_{2,y}^\dagger a_{2,y} + 2)\hbar\omega$$

d) Bereken de ontaardingsgraad van:

i) het grondniveau van $\mathcal{H}_{\text{sys}}$: $2\hbar\omega$

ii) het eerste aangeslagen niveau van $\mathcal{H}_{\text{sys}}$: $3\hbar\omega$

iii) het tweede aangeslagen niveau van $\mathcal{H}_{\text{sys}}$: $4\hbar\omega$

Opgave 2: Een kern met eindige afmetingen

In deze opgave beschouwen we een spinloos deeltje, met lading $-e$ en massa m, dat beweegt in het electrisch veld van een kern met lading Ze. Indien de kern wordt opgevat als een puntdeeltje, wordt de potentiaal gegeven door $V^{(0)}(r) = -Ze^2/r$. De grondtoestand van het deeltje wordt dan gekarakteriseerd door de (genormeerde) golffunctie $\psi_{100}(r) = (1/\sqrt{\pi})(Z/a)^{3/2}\exp(-Zr/a)$ en energie $E_1^{(0)} = -Ze^2/2a$, met Bohrstraal $a = \hbar^2/me^2$.
In deze opgave gaan we onderzoeken hoe het grondniveau van het deeltje verandert indien de kern niet wordt opgevat als een puntdeeltje maar als een bol van straal b met homogene ladingsdichtheid. Zonder bewijs mag u aannemen dat de potentiaal van het deeltje gegeven wordt door:

$$V(r)\begin{cases} Ze^2\frac{(r^2-3b^2)}{2b^3} & \text{voor} r < b \\ V^{(0)}(r) & \text{voor} r \geq b \end{cases}$$

We beginnen met storingsrekening toe te passen op het probleem van het deeltje in de potentiaal V. Daartoe schrijven we $V = V^{(0)} + (V - V^{(0)})$, en vatten we het verschil $V - V^{(0)}$ op als storing.

a) Laat m.b.v. eerste orde storingsrekening zien dat de verschuiving $E_1^{(1)}$ van het grondniveau gegeven wordt door:

$$E_1^{(1)} = \frac{4Z^4e^2}{a^3}\int_0^b dr\left(\frac{1}{2b^3}r^4 - \frac{3}{2b}r^2 + r\right)\exp(-2Zr/a) \tag{1}$$

b) Beredeneer waarom, wanneer we de uitdrukking (1) slechts tot op tweede orde in b willen bepalen, volstaan kan worden met het berekenen van de volgende uitdrukking

$$\frac{4Z^4e^2}{a^3}\int_0^b dr\left(\frac{1}{2b^3}r^4 - \frac{3}{2b}r^2 + r\right)$$

c) Bepaal $E_1^{(1)}$ tot op tweede orde in b.

We gaan nu variatierekening toepassen op het probleem van het deeltje in de potentiaal $V(r)$. Geïnspireerd door de vorm van de grondtoestandsfunctie van het deeltje in de potentiaal $V^{(0)}$, nemen we als (genormeerde) probeerfuncties voor de grondtoestand van het deeltje in de potentiaal V:

$$\psi_\alpha(r) = (1/\sqrt{\pi})(Z/\alpha)^{3/2}\exp(-Zr/\alpha), \quad \alpha > 0$$

Volgens de methode van variatierekening moet de functionaal $E[\psi_\alpha] = \langle\psi_\alpha|\mathcal{H}|\psi_\alpha\rangle/\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle$ geminimaliseerd worden. In de rest van de opgave zullen we volstaan met de bepaling van $\langle\psi_\alpha|\mathcal{H}|\psi_\alpha\rangle$. We beginnen met wat een zijspoor lijkt.

d) i) Laat A en B hermitische operatoren zijn, en $|\chi\rangle$ een eigentoestand van B. Leidt af dat geldt: $\langle\chi|\,[A,B]\,|\chi\rangle = 0$

ii) Toon aan dat $\left[\vec{r}\cdot\vec{p}, T + V^{(0)}\right] = i\hbar(2T + V^{(0)})$, waarbij T de operator voor de kinetische energie is.

iii) Leidt m.b.v. **i)**, **ii)** en $(T + V^{(0)})|\psi_{100}\rangle = -Z^2e^2/2a|\psi_{100}\rangle$ af dat geldt:

$$\langle\psi_{100}|T|\psi_{100}\rangle = Z^2e^2/2a \tag{2}$$

$$\langle\psi_{100}|V^{(0)})|\psi_{100}\rangle = -Z^2e^2/a \tag{3}$$

e) Bereken $\langle\psi_\alpha|\mathcal{H}|\psi_\alpha\rangle$ tot op tweede orde in b.
Hint: Bereken eerst $\langle\psi_\alpha|\vec{\nabla}^2|\psi_\alpha\rangle$ en $\langle\psi_\alpha|1/r|\psi_\alpha\rangle$ als functie van α m.b.v. (2) resp. (3)

Opgave 3 :Spin 1 plus spin $\frac{1}{2}$

Gegevens:
voor $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ geldt: $J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j,m\pm 1\rangle$.
Voor een spin-$\frac{1}{2}$deeltje geldt t.o.v. de basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$: $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

We beschouwen in deze opgave een systeem bestaande uit twee vastgeprikte deeltjes, die alleen wisselwerken via hun spin. Deeltje 1 heeft spin-1 en deeltje 2 heeft spin-$\frac{1}{2}$. De Hamiltoniaan van het systeem wordt in eerste instantie gegeven door:

$$\mathcal{H}_0 = A(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2, \quad A > 0$$

a) Geef de eigenwaarden van deze Hamiltoniaan, alsmede de ontaardingsgraad van elk energieniveau.

We bekijken nu de twee natuurlijke bases van het systeem: (i) de basis van direkt product toestanden $|m_1\rangle|m_2\rangle$ waarbij m_1 en m_2 de spins in de z-richting zijn van deeltje 1 respectievelijk deeltje 2.(ii) De basis voor totale spin, die we noteren als $|S,M\rangle$, met S de totale spin en M de totale spin in de z-richting. Zoals bekend kunnen deze bases in elkaar uitgedrukt worden. Er blijkt te gelden:

$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = |1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle \tag{4}$$
$$|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + |1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right) \tag{5}$$
$$|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{2}|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right) \tag{6}$$
$$|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle = |-1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle \tag{7}$$
$$|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{2}|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right) \tag{8}$$
$$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + |0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right) \tag{9}$$

b) i) Beredeneer waarom (4) geldt.

ii) Leidt (5) af uit (4) .
Hint:$S_{\text{tot}} = S_{1,-} + S_{2,-}$.

iii) leidt (8) af uit (5) .

In de rest van de opgave kunt u (4) t/m (9) als gegevens beschouwen.

c) Laat zien dat $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\right)$ zowel de grondtoestand is van $\mathcal{H}_0$ als een eigentoestand van $S_{\text{tot},x}$ bij eigenwaarde $+\frac{1}{2}\hbar$.

Op $t = 0$ bevindt het system zich in de bij onderdeel **c)** genoemde toestand. Vervolgens wordt een zwak uniform magnetisch veld aangezet, zodat de evolutie van het systeem vanaf $t = 0$ bepaald wordt door de volgende Hamiltoniaan:

$$\mathcal{H} = A(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 + B(S_{1,z} + +S_{2,z})$$

d) Leidt af dat de golffunctie van het systeem op tijdstip $t > 0$ t.o.v. de direkt produkt basis wordt gegeven door:

$$\frac{e^{-\frac{3}{4}i\hbar At}}{\sqrt{6}}\left(-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}iBt}|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + e^{-\frac{1}{2}iBt}|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle e^{\frac{1}{2}iBt}|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}iBt}|-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

e) Wat zijn de mogelijke uitkomsten van een meting van $S_{1,z}$?
Bereken de kansen op die meetuitkomsten (voor $t > 0$) en controleer dat de som ervan 1 is.