INSTITUUT VOOR THEORETISCHE FYSICA
UNIVERSITEIT UTRECHT

NS-3566
prioriteit: 2

EIND-TENTAMEN Quantummechanica 2

Dinsdag, 30 Januari 2007, 09:00 - 12:00, Lokalen BBL105b,107a,160.

1) Begin elke opgave op een afzonderlijk blad.

2) Schrijf op elk blad je naam.

3) Schrijf duidelijk en leesbaar !

4) Het tentamen bestaat uit 3 opgaven.

5) Openboek-tentamen: nee.

6) Formuleblad: nee.

1. Optellen van impulsmoment

Beschouw twee deeltjes met baan-impulsmoment $j_1 = 1$ en $j_2 = 1$, en bijbehorende toestanden $|j_1 = 1, j_2 = 1; m_1, m_2 >$ die we kortweg noteren als $|m_1, m_2 >$. Uit de theorie van het optellen van impulsmoment $\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$ weten we dat er een andere basis is van toestanden $|j_1 = 1, j_2 = 1; j, m >$ die we kortweg noteren als $|j, m >$.

- Bewijs dat $m = m_1 + m_2$. Voor het bovenstaande geval $j_1 = 1$ en $j_2 = 1$, hoeveel basiselementen $|m_1, m_2 >$ zijn er ? Wat zijn dan de mogelijke waarden voor m en hoeveel toestanden horen er bij iedere m ?

- Bewijs nu, weer in het geval $j_1 = 1$ en $j_2 = 1$, de algemene stelling, namelijk dat de mogelijke waarden voor j gegeven zijn door

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \,. \tag{1}$$

2. Variatierekening

We beschouwen hier de Hamiltoniaan voor de anharmonische oscillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + g\frac{m^2\omega^3}{\hbar}x^4 \,, \tag{2}$$

waarbij de laatste term als storing beschouwd wordt met g een kleine parameter. Uit de algemene theorie van tijdsonafhankelijke storingsrekening kan men bewijzen dat de energie van de grondtoestand tot op laagste orde in de storing g gelijk is aan

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega(1 + \frac{3}{2}g) + \mathcal{O}(g^2) \ . \tag{3}$$

Gevraagd wordt nu om dit systeem te behandelen met de theorie van de variatierekening. Beschouw daarom de verzameling van probeer-golffuncties

$$\psi_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(1+\alpha)x^2} \ , \tag{4}$$

met $\alpha \geq -1$.

- Beargumenteer waarom dit een verstandige keuze lijkt (of indien niet, kan u dan een betere keuze maken ?). Verwacht u voor een kleine storing g een kleine of een grote waarde van α ? [Het kan helpen om even de potentiaal en probeer-golffunctie te tekenen.]
- Bereken de energie-functionaal

$$E[\psi_\alpha] = \frac{< \psi_\alpha|H|\psi_\alpha >}{< \psi_\alpha|\psi_\alpha >} \ . \tag{5}$$

  U kunt de volgende gegevens gebruiken:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^{2n} \mathrm{e}^{-\beta x^2} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\beta^{n+\frac{1}{2}}} \ , \tag{6}$$

  met $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ en $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

- Toon aan dat voor een waarde van α waarvoor $E[\psi_\alpha]$ een minimum aanneemt, moet gelden

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha - 6g = 0 \ . \tag{7}$$

- Bovenstaande vergelijking is een derdegraads vergelijking in α voor vaste waarde van g. Probeer nu een oplossing te vinden via de benadering

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 g + \mathcal{O}(g^2) \ , \tag{8}$$

  door de coefficienten bij dezelfde macht van g aan elkaar gelijk te stellen. Bepaal tenslotte hiermee opniew de waarde van de grondtoestands energie $E[\psi_\alpha]$ en vergelijk uw antwoord met (3).

3. Verstrooiing aan een Yukawa-potentiaal

De differentiële werkzame doorsnede van een verstrooiingsproces in een sferisch symmetrische potentiaal wordt gegeven door

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(k,\theta) = |f(k,\theta)|^2 \,, \tag{9}$$

waarbij θ de verstrooiingshoek is en k de grootte van het momentum van het inkomende deeltje met massa m. In de eerste Born-benadering geldt er

$$f^{(1)}(k,\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{q}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, rV(r)\sin(qr) \,, \tag{10}$$

waarbij $q = 2\,k\sin(\theta/2)$. Beschouw nu de Yukawa-potentiaal

$$V = g^2\frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r} \,, \tag{11}$$

met μ en g constanten.

- Bereken de differentiële werkzame doorsnede.
- Toon aan dat de totale werkzame doorsnede gegeven wordt door

$$\sigma(k) = \frac{16\pi m^2 g^4}{\hbar^4\mu^2(\mu^2+4k^2)} \,. \tag{12}$$

- In de limiet $\mu \to 0$ divergeert de totale werkzame doorsnede. Wat betekent zulk een divergentie ? Hoe kan u dit verklaren ?