TENTAMEN QUANTUMMECHANICA II

17 april 1997, 14:00-17:00

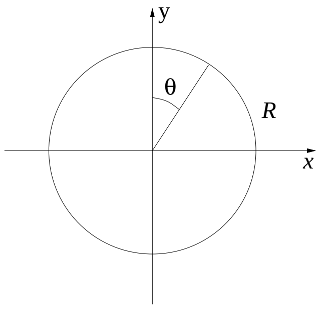
1. Maak iedere opgave op een apart vel.
2. Schrijf op ieder vel uw naam en voorletters en op het eerste vel bovedien uw adres, postcode en studierichting.
3. Schrijf duidelijk; onduidelijk schrift wordt niet nagekeken.
4. Verdeel uw tijd evenrredig over de drie opgaven
5. Het gebruik van literatuur is *niet* toegestaan

Opgave 1 Een deeltje in een gravitatieveld

Een deeltje met massa m beweegt in het xy-vlak op een cirkel met straal R. De Hamiltoniaan van het deeltje is:

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}$$

Hierin is θ de hoek die het deeltje met de positieve y-as maakt ($-\pi \leq \theta < \pi$).



a) Welke randvoorwaarde moeten aan golffuncties voor dit deeltje worden opgelegd?

Definieer voor elke $n \in \mathbb{Z}$ de golffunctie $\psi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta}$. Zonder bewijs mag u van het volgende gebruik maken. $\{\psi_n | n \in \mathbb{Z}\}$ vormt een volledig stelsel van eigenfuncties van $\mathcal{H}_0$; Bovendien is dit stelsl orthonormaal: $\langle\psi_m|\psi_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \psi_m^*(\theta)\psi_n(\theta) = \delta_{n,m}$

b) Geef de energie-eigenwaarden van $\mathcal{H}_0$, alsmede de ontaardingsgraad van elk van die eigenwaarden.

c) Bereken de kans om het deeltje in het segment $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$ aan te treffen, wanneer het zich bevindt in de grondtoestand van $\mathcal{H}_0$.

Het deeltje wordt nu in een homogeen zwaartekrachtsveld langs de negatieve y-richting geplaatst. De potentiaal die het deeltje hierdoor ondervindt wordt gegeven door:

$$V(\theta) = mgR\cos\theta$$

In het onderstaande gaat u het effect van de zwaartekracht onderzoeken met behulp van storingsrekening (met g als storingsparameter).

Uit tijdsonafhankelijke storingsrekeneing volgt in het algemeen dat wanneer de eigenwaarden ε_j

en eigentoestanden $|\phi_j\rangle$ van een ongestoorde Hamiltoniaan $\mathcal{H}_0$ bekend zijn, dat dan voor een niet-ontaarde eigenwaarde ε_k van $\mathcal{H}_0$ de volgende verschuivingen ten gevolge van een storingsterm $g\,V$ gelden:

$$E_k^{(1)} = \langle\phi_k|V|\phi_k\rangle \tag{1}$$

$$E_k^{(2)} = \sum_{j\neq k}\frac{|\langle\phi_j|V|\phi_k\rangle|^2}{\varepsilon_k-\varepsilon_j} \tag{2}$$

$$|\psi_k^{(1)}\rangle = \sum_{j\neq k}\frac{\langle\phi_j|V|\phi_k\rangle^2}{\varepsilon_k-\varepsilon_j}|\phi_k\rangle \tag{3}$$

d) Leidt (1) in het algemeen af.

e) Bereken, voor het deeltje in een gravitatieveld, de laagste niet-verdwijnende correctie op zowel de grondtoestandsfunctie als het grondniveau, U kunt hierbij zonder bewijs gebruik maken van (1), (2) en (3).

f) Bereken tot op eerste orde in g de kans om het deeltje in het segment $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ aan te treffen, wanneer het zich bevindt in de grondtoestand van $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+V$.
Stemt het verschil tussen dit antwoord en het bij onderdeel c) gevonden antwoord kwalitatief met uw verwachting overeen? Licht toe.

Opgave 2:Landau niveaus

Wanneer een spinloos deeltje met massa m en lading e zich in een electromagnetisch veld bevindt, wordt de Hamiltoniaan van dit deeltje gegeven door; $\mathcal{H}(\vec{A},\Phi)=\frac{1}{2m}\vec{\pi}^2+e\Phi$. Hierin geldt voor de kinetische impuls; $\vec{\pi}=\ i\hbar\vec{\nabla}-e\vec{A}$. Verder is Φ een scalaire potentiaal en $\vec{A}$een vectorpotentiaal van het electromagnetische veld.
Beschouwen we nu het geval dat het deeltje zich beweegt in het xy-vlak onder invloed van een homogeen magnetisch veld $\vec{B}=B\vec{e}_z$ langs de positieve z-as. Het blijkt dat de volgende vectorpotentiaal aanleiding geeft tot dit magneetveld: $A_x=-\frac{1}{2}By; A_y=\frac{1}{2}Bx$. De Hamiltoniaan van het deeltje wordt dus gegeven door :

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2m}(\hat{p}_x+m\omega\hat{y})^2+(\hat{p}_y+m\omega\hat{x})^2\ ;\quad \text{met } \omega=\frac{eB}{2m} \tag{4}$$

In deze opgave gaan we eerst de energie-eigenwaarden van $\mathcal{H}$ bepalen; de zogenaamde Landau niveaus. Daartoe introduceren we de volgende operatoren:

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x+ia_y) \quad \overline{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x-ia_y)$$

Hierbij is $a_x=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right)$ de gebruikelijke annihilatie-operator voor de x-richting; analoog voor a_y. Het blijkt dat we zowel a als $\overline{a}$ op kunnen vatten als een annihilatie-operator, in de zin dat beide met hun respectieve hermitisch toegevoegden voldoen aan de gebruikelijke commutatierelaties:$[a,a^\dagger]=[\overline{a},\overline{a}^\dagger]=1]$.

a) Laat zien dat de Hamiltoniaan (4) geschreven kan worden als

$$\mathcal{H}=\hbar(2a^\dagger a+1)$$

b) Laat zien dat de energie-eigenwaarden van $\mathcal{H}$ ten minste $\hbar\omega$ moeten zijn.

We gaan nu eerst afleiden dat deze laagste waarde ook echt wordt aangenomen.

c) Laat nu zien dat de toestand $|0,0\rangle$ bepaald door $a|0,0\rangle=\overline{a}|0,0\rangle=0$ een eigentoestand van $\mathcal{H}$ is bij eigenwaarde $\hbar\omega$.
Leidt de expliciete plaatsrepresentatie van deze toestand af (op een normeringsconstante na).
Beargumenteer dat deze oplossing fysisch acceptabel is.

Analoog aan de harmonische oscillator, definieeren we nu toestanden $|n,m\rangle$ door de creatie-operatoren $a^\dagger$ en $\overline{a}^\dagger$ te laten werken op de toestand $|0,0\rangle$ die we zojuist hebben gevonden:

$$|n,m\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a^\dagger)^n(\overline{a}^\dagger)^m}{\sqrt{n!m!}}|0,0\rangle \quad n,m = 0,1,2,...$$

De toestanden $|n,m\rangle$ vormen een volledige basis. Analoog aan de harmonische oscillator, voldoen deze toestanden aan de volgende eigenwaarde-vergelijkingem:

$$a^\dagger a|n,m\rangle = n|n,m\rangle \quad \overline{a}^\dagger\overline{a}|n,m\rangle = m|n,m\rangle \tag{5}$$

d) Laat met behulp van (5) zien dat de toestanden $|n,m\rangle$ eigentoestanden zijn van $\mathcal{H}$.
Wat is het energie spectrum?
Geef van elk van de energieniveaus ook de ontaardingsgraad.

Tot slot keren we terug naar het algemene geval van een geladen deeltje in een electromagnetisch veld, waarvan de Hamiltoniaan gegeven wordt door:

$$\mathcal{H}(\vec{A},\Phi) = \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + e\Phi$$

Zoals bekend geven potentialen die via een ijktransformatie aan elkaar gerelateerd zij aanleiding tot hetzelfde electromagnetische veld. Dat wil zeggen, als voor een of andere functie $\chi(\vec{r},t)$ geldt

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \tag{6}$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{7}$$

dan hoort bij $(\vec{A}',\Phi')$ hetzelfde $\vec{E},\vec{B}$-veld als bij $(\vec{A},\Phi)$.

e) Er geldt: als $\psi(\vec{r},t)$ een oplossing is van de Schrödingervergelijking $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}(\vec{A},\Phi)\psi$ dan voldoet $\psi'(\vec{r},t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\frac{e}{\hbar}\chi(\vec{r},t)}\psi(\vec{r},t)$ aan de Schrödingervergelijking $i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \mathcal{H}(\vec{A}',\Phi')\psi'$, waarbij $(\vec{A},\Phi)$ en $(\vec{A}',\Phi')$ volgens (6) en (7) aan elkaar gerelateerd zijn.
Geef een fysische interpretatie van dit resultaat. (U hoeft dit resultaat dus *niet* zelf af te leiden.)

opgave 3 : Verstrooiing van een spin-$\frac{1}{2}$deeltje aan een bolsymmetrische potentiaal

Beschouw een spin-$\frac{1}{2}$deeltje dat zich in drie dimensies beweegt. De toestend ψ van zo'n deeltje kunnen we in het algemeen schrijven als $\psi = \psi_1|\uparrow\rangle + \psi_2|\downarrow\rangle$. Hierbij zijn ψ_1 en ψ_2 elementen uit de baanruimte en zijn $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ eigentoestanden van S_z, bij eigenwaarden $+\frac{\hbar}{2}$ resp. $-\frac{\hbar}{2}$.
Wat anders genoteerd, kunnen we de toestand dus representeren door een tweecomponentige golffunctie;

$$\psi(\vec{r} = \begin{pmatrix}\psi_1(\vec{r})\\ \psi_2(\vec{r})\end{pmatrix}$$

a) wat is de fysische interpretatie van $|\psi_1(\vec{r})|^2\mathrm{d}\vec{r}$ en$|\psi_2(\vec{r})|^2\mathrm{d}\vec{r}$?

In deze opgave beschouwen we een spin-$\frac{1}{2}$deeltje dat verstrooid wordt aan een bolsymmetrische potentiaal met eindige dracht. Het deeltje valt langs de positieve z-as in met een energie $\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ en met de spin geprepareerd in de toestand $c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$ (c_1 en c_2 zijn constanten waarvoor geldt $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$). Om de toestand $\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}$ te vinden die zo 'n verstrooiingssituatie beschrijft, moeten we de oplossing van $\mathcal{H}\psi = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi$ bepalen die het volgende het asymptotische gedrag heeft:

$$\begin{pmatrix}\psi_1(r,\theta)\\ \psi_2(r,\theta)\end{pmatrix} \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} e^{ikz}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} + \frac{e^{ikr}}{r}\begin{pmatrix}f_1(r,\theta)\\ f_2(r,\theta)\end{pmatrix} \tag{8}$$

b) Interpreteer elk van de termen in het rechterlid van (8) en geef de fysische overweging op grond waarvan dit asymptotische gedrag geëist wordt.

We gaan nu de oplossing van $\mathcal{H}\binom{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\binom{\psi_1}{\psi_2}$ bepalen die voldoet aan (8). We nemen daarbij aan dat we maken hebben met een Hamiltoniaan van de volgende vorm.

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + \begin{pmatrix} V_1(r) & 0 \\ 0 & V_2(r) \end{pmatrix}$$

Volgens de methode van partiële golfanalyse moeten we de θ-afhankelijkheid van de ψ_j ontwikkelen in Legendre-polynomen:

$$\psi_j(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{U_{j,l}(k,r)}{r} P_l(\cos\theta) \tag{9}$$

De vergelijking $\mathcal{H}\psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi$ is dan equivalent aan de volgende vergelijking voor de $U_{j,l}(k,r)$.

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar}V_j(r) + k^2\right) U_{j,l}(k,r) = 0 \tag{10}$$

Het asymptotische gedrag van de oplossing van (10) is van de vorm:

$$U_{j,l}(k,r) \overset{r\to\infty}{\rightarrow} A_{j,l}(k)\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{i,l}(k)\right)$$

Vergelijking (10) legt de faseverschuiving $\delta_{i,l}(k)$ volledig vast, maar laat de amplitude $A_{j,l}(k)$ volledig onbepaald. De $A_{j,l}(k)$ worden vastgelegd door de randvoorwaarde (8) op te leggen.

c) Leid door eis (8) op te leggen op (9) het volgende af.

i) $A_{j,l}(k) = c_j \frac{(2l+1)i^l}{k} e^{i\delta_{j,l}(k)}$

ii) $f_j(k,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{j,l}(k) P_l(\cos\theta)$, met $f_{j,l}(k) = c_j \frac{(2l+1)i^l}{2ik}\left(e^{2i\delta_{j,l}(k)} - 1\right)$.

Gegeven: $e^{ikz} \overset{r\to\infty}{\rightarrow} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)i^l}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) P_l(\cos\theta)$

We gaan het bovenstaande nu toepassen op de volgende concrete verstroiingssituatie. Het inkomende deeltje is geprepareerd met de spin in de positieve x-richting; verder geldt dat V_1 en V_2 herde bollen potentialen zijn (met straal a_1 resp. a_2):

$$V_j(r) \begin{cases} \infty & \text{voor} \quad 0 \le r < a_j \\ 0 & \text{voor} \quad r \ge a_j \end{cases}$$

Bij de onderstaande berekeningen kunt u zonder bewijs gebruik maken van de volgende gegevens.

$$\begin{aligned} \sigma_l &= \frac{4\pi}{2l+1}\left(|f_{1,l}(k)|^2 + |f_{2,l}(k)|^2\right) \\ S_x &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ten opzichte van de basis } \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}\ ) \end{aligned} \tag{11}$$

d) bereken de botsingsdoorsnede voor s-golf verstrooiing: σ_0.
Aanwijzing bij de bepaling van de $\delta_{j,0}(k)$: Bepaal eerst de oplossing $U_{j,0}$ op elk van de gebieden $r < a_j$ en $r > a_j$. Sluit de oplossingen op deze twee gebieden vervolgens op de juiste manier op elkaar aan. Bedenk daarbij dat die aansluiting zo moet zijn dat de tweede afgeleide van $U_{j,0}$ een oneindige sprong maakt in $r = a_j$ (omdat V_j dat doet).