Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-356b werd in 2006/2007 gegeven door dr. S.J.G. Vandoren.

# Quantummechanica 2 (NS-356b)
# 7 november 2006

1. Begin elke opgave op een afzonderlijk blad.
2. Schrijf op elk blad je naam.
3. Schrijf duidelijk en leesbaar!
4. het tentamen bestaat uit 3 opgaven.

## Opgave 1 Spin

Gegeven de Pauli matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- Vind de eigenwaarden en een orthonormale basis van eigentoestanden van de Pauli matrix $\sigma_x$.
- Bereken de verwachtingswaarden $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$ en $\langle \sigma_z \rangle$ in beide eigentoestanden van $\sigma_x$.
- Berken ook de varianties $\left\langle (\Delta\sigma_x)^2 \right\rangle$ en $\left\langle (\Delta\sigma_z)^2 \right\rangle$, telkens in de basis van eigentoestanden van $\sigma_x$. De definities zijn dat $\Delta A \equiv A - \langle A \rangle$, met $\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$.
- Verifieer dat het product $\left\langle (\Delta\sigma_x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta\sigma_z)^2 \right\rangle$ voldoet aan de onzekerheidsrelatie. Formuleer eerst wat de onzekerheidsrelatie is.

## Opgave 2 Deeltje in een elektrisch veld

De Lorentzkracht voor een deeltje met massa $m$ en lading $e$ in een elektrisch veld $\vec{E}$ wordt in het Heisenbergbeeld gegeven door

$$m \frac{d^2 \vec{X_H}}{dt^2}(t) = e\vec{E} \tag{2}$$

en de Hamiltoniaan is ($\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$)

$$H = \frac{\vec{p}}{2m} + e\phi \tag{3}$$

Beschouw nu de situatie waarin het elektrisch veld *constant* (in ruimte en tijd) is.

- bepaal de elektrische potentiaal $\phi$ uit de relatie $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.
- Toon aan dat de vergelijking voor de Lorentzkracht volgt uit de Heisenbergvergelijking

  $$\frac{d\vec{p_H}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\vec{p_H}, H] \tag{4}$$

  waarbij $\vec{p_H}$ het impuls is in het Heisenbergbeeld.
- Los de vergelijking (2) op voor de heisenbergpositie-operator $X_H(t)$.
- bepaal de positie-operator $X_S$ in het Schrodingenbeeld uit die van het Heisenbergbeeld.

## Opgave 3 Impulsmoment

In de theorie van het impulsmoment voldoen de ladderoperatoren aan

$$J_{\pm}|j,m>=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\hbar|j,m\pm 1> \qquad (5)$$

met $-j \leq m \leq j$. Verder hebben we

$$J_z|j,m>=m\hbar|j,m>\ ,\ J_{\pm}=J_x \pm iJ_y \qquad (6)$$

- Toon omgekeerd aan dat voor elke set van operatoren $J_z, J_+, J_-$ die voldoen aan bovenstaande relaties, de commatatierelaties van het impulsmoment voldaan zijn.

  Beschouw nu een deeltje met spin 1, i.e. $j = 1$.

- Bereken de matrixelementen van $J_x, J_y, J_z$ in de basis $|1,m>$. Schrijf het resultaat als $3\times 3$-matrices.

- Bereken de eigenwaarden van deze matrices, alsook die van $\vec{J}^2$. Stemt dit overeen met de algemene theorie van het impulsmoment?