Instituut voor Theoretische Fysica
Universiteit Utrecht

EIND-TENTAMEN Quantummechanica 2

Woensdag, 19 Maart 2008, 09:00 - 12:00, Lokaal BBL105.

1) Begin elke opgave op een afzonderlijk blad.
2) Schrijf op elk blad je naam.
3) Schrijf duidelijk en leesbaar !
4) Het tentamen bestaat uit 3 opgaven, met elk ongeveer hetzelfde gewicht.
5) Openboek-tentamen: nee.
6) Formuleblad: nee.

1. Schrödinger en Heisenberg beeld

Met behulp van de evolutie operator (we veronderstellen dat de Hamiltoniaan niet expliciet van de tijd afhangt)

$$U(t,t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}H\,(t-t_0)} \ , \tag{1}$$

worden tijdsonafhankelijke operatoren A_{S} in het Schrödinger beeld gerelateerd aan tijdsafhankelijke operatoren $A_{\mathrm{H}}(t)$ in het Heisenberg beeld via (we stellen $t_0 = 0$ van nu af aan)

$$A_{\mathrm{H}}(t) = U^{\dagger}(t)\,A_{\mathrm{S}}\,U(t) \ . \tag{2}$$

In het Heisenberg beeld wordt de tijdsevolutie bepaald door de Heisenberg vergelijkingen. Toegepast op de positie operator X_{H} en impuls operator P_{H},

$$\frac{\partial X_{\mathrm{H}}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[X_{\mathrm{H}}, H] \ , \qquad \frac{\partial P_{\mathrm{H}}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[P_{\mathrm{H}}, H] \ . \tag{3}$$

Beschouw nu de harmonische oscillator in één dimensie met Hamiltoniaan

$$H = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 \ . \tag{4}$$

- Bereken $\frac{\partial X_{\mathrm{H}}}{\partial t}$ via het rechterlid in (3). Geef bij elke operator goed aan in welk beeld hij geschreven is. Analoog, bereken $\frac{\partial P_{\mathrm{H}}}{\partial t}$.

- Los dit stelsel van differentiaal vergelijkingen op en bewijs dat de oplossing kan geschreven worden als

$$X_{\rm H}(t) = X_{\rm S}\cos(\omega\, t) + \frac{1}{m\omega} P_{\rm S}\sin(\omega\, t)\ . \tag{5}$$

- Voldoet deze oplossing aan de verwachting u heeft gebaseerd op de oplossing van de bewegingsvergelijkingen in de klassieke mechanica ? Motiveer uw antwoord.

2. Impulsmoment

In de theorie van het impulsmoment voldoen de ladder operatoren aan

$$J_\pm |j, m >= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\hbar |j, m \pm 1 >\ , \tag{6}$$

met $-j \leq m \leq j$. Beschouw nu een deeltje met spin 1/2, i.e. $j = 1/2$.

- Bereken de matrix elementen van $J_x = (J_+ + J_-)/2$, $J_y = (J_+ - J_-)/2i$ en J_z in de basis $|\frac{1}{2}, m >$. Schrijf het resultaat als 2 bij 2 matrices.
- Bereken, via de machtreeks van de exponent, de matrix elementen

$$\mathcal{D}^{(j=\frac{1}{2})}_{m'm} \equiv < \tfrac{1}{2}, m' | \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\cdot\vec{J}} | \tfrac{1}{2}, m >\ , \tag{7}$$

waarbij $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ en $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ willekeurige hoeken zijn waarover de rotatie plaats vindt. Bereken eerst hiervoor de 2 bij 2 matrix $\vec{\alpha}\cdot\vec{J}$ en neem daarna de exponent [U kan uw eind antwoord controleren door de unitariteit van $\mathcal{D}$ na te gaan.]

- Naar welke toestanden transformeren de kets $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2} >$ en $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} >$ onder een rotatie rond de hoeken

i) $\vec{\alpha} = (0, \pi, 0)$
ii) $\vec{\alpha} = (2\pi, 0, 0)$
iii) $\vec{\alpha} = (0, 0, 4\pi)$?

3. Tijdsafhankelijke storingstheorie

Gegeven de ongestoorde Hamiltoniaan voor een twee-toestanden systeem:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}\ . \tag{8}$$

Het is duidelijk dat de eigenwaarden voor het ongestoorde probleem E_1 en E_2 zijn, met bijbehorende eigenvectoren

$$\phi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \qquad \phi_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \tag{9}$$

respectievelijk.

We voegen nu een tijdsafhankelijke storing toe van de vorm

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & g\sin(\omega t) \\ g\sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

met storingsparameter g een reeel en klein getal.

- Gegeven is dat op $t = 0$ de toestand in de eigentoestand $\phi_1^{(0)}$ van de ongestoorde Hamiltoniaan is. Bereken dan, gebruik makende van eerste orde storingstheorie, een uitdrukking voor de kans dat op tijdstip t, het systeem zich in eigentoestand $\phi_2^{(0)}$ bevindt, als functie van t.
- Analyseer uw antwoord voor $t \to 0$; wat is de eerste niet nulle correctie ? Vergelijk dit met de situatie wanneer de storing $\cos(\omega t)$ bevatte in plaats van $\sin(\omega t)$. Is uw antwoord consistent met het feit dat $\sin(\omega t)$ oneven is in $t \to -t$?

Ter herinnering: de algemene oplossing van de Schrödinger vergelijking kan geschreven worden als

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_k c_k(t) \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |\psi_k\rangle \ , \tag{11}$$

met E_k en $|\psi_k\rangle$ de eigenwaarden en eigentoestanden van H_0, en waarbij $c_k(t)$ tijdsafhankelijke coëfficiënten zijn die u in storingstheorie kan bepalen uit de Schrödinger vergelijking, gebruik makende van de machtreeks

$$c_k(t) = c_k^{(0)}(t) + g c_k^{(1)}(t) + g^2 c_k^{(2)}(t) + \cdots \ . \tag{12}$$

Eerste orde storingstheorie betekent dus het bepalen van de functies $c_k^{(1)}(t)$.