Wat is Wiskunde Exam B, 17-01-2011, English

- Voor de Nederlandse tekst van dit tentamen zie ommezijde.
- Write the solution to each problem on a <u>separate sheet</u> of paper
- On each sheet of paper you hand in write your name and student number
- Each problem counts for 20 points, leading to a maximum of 100 points
- Do not provide just final answers. Prove and motivate your arguments!
- The use of computer, calculator, lecture notes, or books is not allowed. A personal A4 is allowed.

Problem A) Consider the real valued assignment $f(x) = \frac{x}{x-1}$ and let $A \subseteq \mathbb{R}$ be the largest subset of the real numbers on which the function is well-defined.

(1) Find the set A and prove that the image $\{f(a) \mid a \in A\} = A$.
(2) Prove that $f : A \to A$ is bijective and find its inverse.
(3) Write f^n for the composition of f with itself n times. Give an explicit formula for $f^3(x)$.
(4) Calculate $f^{1000}(0)$.

Problem B) (<u>new sheet</u>!)

(1) State (without proof) the Cantor-Schroeder-Bernstein Theorem.
(2) Let $S = [-1, 1] \times [-1, 1]$ and $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Prove that $|S| = |C|$ (hint: think of these sets geometrically).
(3) Prove that the set $X = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| < \omega\}$, that is the set of all finite subsets of $\mathbb{N}$, is countably infinite.

Problem C) (<u>new sheet</u>!)

(1) Let $d = gcd(173, 2011)$. Use the Euclidean Algorithm to find d and write d as $x \cdot 2011 + y \cdot 173$ where x and y are integers.
(2) Let a, b be two positive natural numbers and let $gcd(a, b) = c$. Prove that $gcd(a^2, b) \leq c^2$.

Problem D) (<u>new sheet!</u>)

(1) Let $(G, *, e)$ be a group. Prove that for every $g, h, k \in G$ holds that $(g * h * k)^{-1} = k^{-1} * h^{-1} * g^{-1}$.
(2) Let $A = \{1, 2, 3\}$. For each element x in the group $Symm(A)$, the group of bijections from A to A, find the least natural number n_x such that in $Symm(A)$ holds $x * x * \cdots * x$ (n_x times) is the unit element.

Problem E) (<u>new sheet</u>!) For each of the following statements decide if it is true or false. Give a short argument to support your answer.

(1) Let A be a set and $f : A \to A$ a function. If $f \circ f \circ f \circ f \circ f$ is invertible then f is invertible.
(2) There exists a set X and a subset $Y \subseteq X$ such that $X \neq Y$ and $|X| = |Y|$.
(3) For any natural numbers a, b holds that if $a \neq b$ then $gcd(a^b, b^a) = 1$.
(4) Let $(G, *, e)$ be a group. For any two elements $g, h \in G$ holds that $(g * h)^{-1} = g^{-1} * h^{-1}$.

WAT IS WISKUNDE TENTAMEN B, 17-01-2011, NEDERLANDS

- Please turn over for the English text of this exam.
- Schrijf de uitwerking van iedere opgave met een apart vel papier
- Schrijf op ieder vel paier dat je inlevert je naam en studentnummer
- Iedere opgave is 20 punten waard. Je kunt maximaal 100 puten halen.
- Geef niet alleen uitkomsten. Bewijs en motiveer je antwoorden!
- Het gebruik van een computer, rekenmachine, dictaat of boeken is niet toegestaan. Je mag een persoonlijk A4 gebruiken.

Opgave A) Beschouw het reëelwaardige voorschrift $f(x) = \frac{x}{x-1}$ en laat $A \subseteq \mathbb{R}$ de grootste deelverzameling van de reële getallen zijn zodat de functie goed gedefinieerd is.

(1) Bepaal de verzameling A en bewijs dat $\{f(a) \mid a \in A\} = A$.
(2) Bewijs dat $f : A \to A$ bijectief is en bepaal de inverse.
(3) Schrijf f^n voor de n-voudige samenstelling van f met zichzelf. Geef een expliciete formule voor $f^3(x)$.
(4) Bereken $f^{1000}(0)$.

Opgave B) (nieuw vel!)

(1) Formuleer (zonder bewijs) de stelling van Cantor-Schroeder-Bernstein.
(2) Laat $S = [-1,1] \times [-1,1]$ en $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bewijs dat $|S| = |C|$ (hint: interpreteer deze verzamelingen meetkundig).
(3) Bewijs dat de verzameling $X = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| < \omega\}$, de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$, aftelbaar oneindig is.

Opgave C) (nieuw vel!)

(1) Laat $d = ggd(173, 2011)$. Gebruik het algoritme van Euclides om d te bepalen en schrijf d als $x \cdot 2011 + y \cdot 173$ waarbij x en y gehele getallen zijn.
(2) Laat a, b twee positieve natuurlijke getallen zijn, en laat $ggd(a,b) = c$. Bewijs dat $ggd(a^2, b) \leq c^2$.

Opgave D) (nieuw vel!)

(1) Laat $(G, *, e)$ een groep zijn. Bewijs dat voor alle $g, h, k \in G$ geldt dat $(g * h * k)^{-1} = k^{-1} * h^{-1} * g^{-1}$.
(2) Laat $A = \{1, 2, 3\}$. Bepaal voor ieder element x van de groep $Symm(A)$, de groep van bijecties van A naar A, het kleinste natuurlijk getal n_x zodat in $Symm(A)$ geldt dat $x * x * \cdots * x$ (n_x keer) het eenheidselement is.

Opgave E) (nieuw vel!) Bepaal voor iedere van de volgende beweringen of hij juist of onjuist is. Geef een kort argument om je antwoord te ondersteunen.

(1) Laat A een verzameling zijn en $f : A \to A$ een functie. Als $f \circ f \circ f \circ f \circ f$ inverteerbaar is, dan is f inverteerbaar.
(2) Er bestaan een verzameling X en een deelverzameling $Y \subseteq X$ zodat $X \neq Y$ en $|X| = |Y|$.
(3) Voor alle natuurlijke getallen a, b geldt dat als $a \neq b$ dan $ggd(a^b, b^a) = 1$.
(4) Laat $(G, *, e)$ een groep zijn. Voor ieder tweetal elementen $g, h \in G$ geldt dat $(g * h)^{-1} = g^{-1} * h^{-1}$.