Wat is Wiskunde Exam B (retake), 14-03-2011, English

- Voor de Nederlandse tekst van dit tentamen zie ommezijde.
- On each sheet of paper you hand in write your name and student number
- Each problem counts for 20 points, leading to a maximum of 100 points
- Do not provide just final answers. Prove and motivate your arguments!
- The use of computer, calculator, lecture notes, or books is not allowed. A personal A4 is allowed.

Problem A) Consider the real valued assignment $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)\cdot(x-2)}$ and let $A \subseteq \mathbb{R}$ be the largest subset of the real numbers on which the function is well-defined.

(1) Find the set A and prove that $f(x)$ is not injective.
(2) Find a subset $B \subseteq A$ such that the restriction of $f(x)$ to B is injective, find $C = \{f(x) \mid x \in B\}$ and a function $g : C \to B$ for which $(g \circ f)(x) = x$ for all $x \in B$.

Problem B)

(1) State (without proof) the Cantor-Schroeder-Bernstein Theorem.
(2) Let $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ and $T = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$. Prove that $|S| = |T|$.
(3) Prove that the set $X = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| < \omega\}$, that is the set of all finite subsets of $\mathbb{R}$, is not countable.

Problem C)

(1) Let $d = gcd(173, 2011)$. Use the Euclidean Algorithm to find d and write d as $x \cdot 2011 + y \cdot 173$ where x and y are integers.
(2) Let a, b be two positive natural numbers. Prove that $gcd(a, b) = 1$ is true if, and onlyif, $gcd(a^2, b^2) = 1$ holds.

Problem D)

(1) Let $(G, *, e)$ be a group. Prove that for every $g, h \in G$ holds that $(g^{-1} * h)^{-1} = h^{-1} * g$.
(2) In the group $\mathbb{Z}_7^*$ find an element $x \in \mathbb{Z}_7^*$ such that $x^6 = e$ and so that $x^k \neq e$ for $1 \leq k \leq 5$.

Problem E) For each of the following statements decide if it is true or false. Give a short argument to support your answer.

(1) Let A be a set and $f : A \to A$ a function. If $f \circ f \circ f \circ f \circ f$ is injective then f is surjective.
(2) There exists a set X and a subset $Y \subseteq X$ such that $|X| = |Y \times X|$.
(3) For any natural numbers a, b holds that if $a > b$ then $gcd(a - b, a + b) = 1$.
(4) Let $(G, *, e)$ be a group. For any two elements $g, h \in G$ holds that $(g^{-1} * h^{-1})^{-1} = h * g$.

Wat is Wiskunde Tentamen B (herkansing), 14-03-2011, Nederlands

- Please turn over for the English text of this exam.
- Schrijf op ieder vel papier dat je inlevert je naam en studentnummer
- Iedere opgave is 20 punten waard. Je kunt maximaal 100 punten halen.
- Geef niet alleen uitkomsten. Bewijs en motiveer je antwoorden!
- Het gebruik van een computer, rekenmachine, dictaat of boeken is niet toegestaan. Je mag wel een eigen A4 gebruiken.

Opgave A) Beschouw het reëelwaardige voorschrift $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)\cdot(x-2)}$ en laat $A \subseteq \mathbb{R}$ de grootste deelverzameling van de reële getallen zijn zodat de functie goed gedefinieerd is.

(1) Bepaal de verzameling A en bewijs dat $f(x)$ geen injectieve functie is.
(2) Vind een deelverzameling $B \subseteq A$ zodat de beperking van $f(x)$ tot B wel injectief is, vind $C = \{f(x) \mid x \in B\}$ en een functie $g : C \to B$ zo dat $(g \circ f)(x) = x$ geldt voor alle $x \in B$.

Opgave B)

(1) Formuleer (zonder bewijs) de stelling van Cantor-Schroeder-Bernstein.
(2) Laat $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ en $T = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$. Bewijs dat $|S| = |C|$.
(3) Bewijs dat de verzameling $X = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| < \omega\}$, de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$, niet aftelbaar is.

Opgave C)

(1) Laat $d = ggd(173, 2011)$. Gebruik het algoritme van Euclides om d te bepalen en schrijf d als $x \cdot 2011 + y \cdot 173$ waarbij x en y gehele getallen zijn.
(2) Laat a, b twee positieve natuurlijke getallen zijn. Bewijs dat $ggd(a, b) = 1$ geldt precies dan als $ggd(a^2, b^2) = 1$ geldig is.

Opgave D)

(1) Laat $(G, *, e)$ een groep zijn. Bewijs dat voor alle $g, h \in G$ geldt dat $(g^{-1} * h)^{-1} = h^{-1} * g$.
(2) Vind in de groep $\mathbb{Z}_7^*$ element x zodat $x^6 = e$ en zodat $x^k \neq e$ voor alle $1 \leq k \leq 5$.

Opgave E) Bepaal van elk van de volgende beweringen of zij juist of onjuist is . Geef een kort argument om je antwoord te ondersteunen.

(1) Laat A een verzameling zijn en $f : A \to A$ een functie. Als $f \circ f \circ f \circ f \circ f$ injectief is, dan is f surjectief.
(2) Er bestaan een verzameling X en een deelverzameling $Y \subseteq X$ zodat $|X| = |Y \times X|$.
(3) Voor voor ieder tweetal natuurlijke getallen a, b geldt dat als $a > b$ dan $gcd(a - b, a + b) = 1$.
(4) Laat $(G, *, e)$ een groep zijn. Voor ieder tweetal elementen $g, h \in G$ geldt dat $(g^{-1} * h^{-1})^{-1} = h * g$.