Uitwerking tentamen 'Wat is Wiskunde'

Sven Bosman

4 Januari 2012

(1a) We noemen de totale uitdrukking ϕ. Dan krijgen we de volgende waarheidstabel:

P	Q	R	$P \vee (Q \Leftrightarrow R)$	$\sim R \vee P$	$P \Leftrightarrow \sim R$	ϕ
1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1

(1b) Deze bewering is inderdaad een tautologie. Als P waar is dan zijn beide kanten duidelijk waar, en als P niet waar is, dan volgt dat de linkerkant en de rechterkant beide gelijk zijn aan $\sim Q \wedge R$, en iedere bewering is equivalent met zichzelf. En omdat P waar of onwaar moet zijn volgt dat in alle mogelijk gevallen de bewering een tautologie is. $\square$

(2) Omdat $(2k)^2 = 4k^2$ en $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ zien we dat een getal even is dan en slechts dan als het kwadraat van dat getal even is. Dus $(m+n)^2$ is oneven dan en slechts dan als $m+n$ oneven is. De som van twee even getallen is duidelijk even, en van twee oneven getallen ook (want $2k+1+2r+1 = 2(k+r+1)$), maar de som van een even en een oneven getal is oneven. Dus $m+n$ is oneven dan en slechts dan als m en n verschillende pariteit hebben. $\square$

(3a) Het checken van zo'n bewering gaat het snelst met een Venn-diagram. Dit geeft ons het volgende antwoord: de bewering is onwaar. Stel namelijk dat x een element is zodat $x \notin A$, $x \in B$ en $x \in C$. Dan zit x duidelijk in de vereniging van A en B, en niet in de doorsnede van A en C, en dus is x een element van de eerste verzameling. Echter, omdat $x \in C$ kan x onmogelijk een element zijn van de tweede verzameling. $\square$

(3b) Ook hier is een Venn-diagram de snelste methode om het volgende te zien: deze bewering is ook niet waar. Stel namelijk dat x een element is zodat $x \in A$, $x \in B$ en $x \notin C$. Dan zit x in A en niet in $B \cap C$, dus $x \in A - (B \cap C)$ dus $x \notin \overline{A - (B \cap C)}$. Echter, omdat $x \in B$ geldt $x \notin A - B$, dus $x \in \overline{A - B}$, en dus $x \in \overline{A - C} \cup \overline{A - B}$. Dus x is een element van de ene verzameling maar niet van de ander, en dus zijn deze verzamelingen ongelijk. $\square$

(4) Een bewijs met volledige inductie betekent dat we de inductiebasis en de inductiestap moeten bewijzen. Eerst de inductiebasis. Het kleinste natuurlijke getal is 0, en we zien dat de som van alle kwadraten tot en met 0^2 gelijk is aan 0, en $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = 0$ als $n = 0$. Dus voor $n = 0$ is deze gelijkheid inderdaad geldig.
Nu bewijzen we de inductiestap. Dus we nemen aan dat de stelling geldig is voor een zeker getal n, en bewijzen dat hij dan ook waar moet zijn voor het getal $n + 1$. Dit is een kwestie van uitschrijven:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) &= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{6}(n+1) \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{3}(3n^2 + 3n + 1) + \frac{1}{2}(2n+1) + \frac{1}{6} \\
&= 1^2 + ... + n^2 + (n^2 + 2n + 1) \\
&= 1^2 + ... + n^2 + (n+1)^2
\end{aligned}$$

Merk op dat we in het uitschrijven dus gebruik hebben gemaakt van de gelijkheid die de inductiehypothese ons geeft. We zien hier nu staan dat de stelling geldig is voor het getal $n + 1$, dus met het principe van volledige inductie volgt dat de stelling geldig is voor alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

(5a) In dit soort situaties kan het helpen om te bedenken wat er nou eigenlijk staat. We zien dat (x_1, x_2) en (y_1, y_2) gerelateerd zijn dan en slechts dan als $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$, en omdat de som van twee kwadraten niet negatief is (want kwadraten zijn niet negatief), volgt dat dit het geval is dan en slechts dan als $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$. Maar we zien dat $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ gewoon de afstand van het punt (x_1, x_2) tot de oorsprong is in $\mathbb{R}^2$. Oftewel, twee punten uit $\mathbb{R}^2$ zijn aan elkaar gerelateerd dan en slechts dan als ze dezelfde afstand tot de oorsprong hebben in $\mathbb{R}^2$. Dit is een relatie waarvan we snel kunnen zien dat het een equivalentierelatie is:
De relatie is *reflexief* (oftewel: ieder punt is aan zichzelf gerelateerd), omdat ieder punt gelijke afstand tot de oorspong heeft met zichzelf, in andere woorden: $x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$.
De relatie is *transitief* (oftewel: als x gerelateerd is aan y en y aan z dan x aan z), omdat als x en y op dezelfde cirkel met middelpunt de oorspong liggen, en y en z ook, dan liggen x en z dus beide op die cirkel.
De relatie is *symmetrisch* (oftewel: als x geralateerd aan y dan y aan x), omdat als x en y gelijke afstand tot de oorspong hebben, dan y en x ook. Dus al met al volgt dat deze relatie een equivalentierelatie is. $\square$

(5b) Als we een cirkel met een bepaalde straal r en middelpunt de oorsprong hebben, dan zijn de punten op deze cirkel allemaal aan elkaar geralateerd, en punten buiten deze cirkel zijn nooit aan punten op deze cirkel geralateerd (dit volgt allemaal direct uit de interpretatie van de relatie die we bij a hebben gezien). Dus De equivalentieklassen worden gegeven door de punten $(r, 0)$, voor iedere $r \geq 0$. $\square$

(6) Omdat $c \equiv d \mod 3$ kunnen we schrijven dat $c = 3c' + k$ en $d = 3d' + k$. Nu gaan we de uitdrukking $ad + bc$ modulo 3 bekijken. Met de schrijfwijze voor c en d die we net hebben geïntroduceerd staat hier $a(3d' + k) + (3c' + k)b$, en omdat we modulo 3 werken mogen we alle veelvouden van 3 weglaten, en dus staat er $ak + bk = (a + b)k$. En dit is een veelvoud van 3 omdat $a + b$ een veelvoud is van 3, en dus volgt $ad + bc \equiv 0 \mod 3$. $\square$