WAT IS WISKUNDE (English version on the other side)
Woensdag 2 januari 2013, 13.30 – 16.30 uur

- Alle opgaven tellen even zwaar, 10 punten per opgave.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag wel gebruik maken van een aantal basisprincipes, zoals de driehoeksongelijkheid. Het is niet toegestaan computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

1. Deze vraag bestaat uit twee losse onderdelen waartussen geen verband is.

   (a) (5 punten) Bewijs met een waarheidstabel dat de uitdrukking

   $$((\sim P \vee Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

   een tautologie is.

   (b) (5 punten) Laat $x, y \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat als xy^2 oneven is, x en y allebei oneven zijn.

2. A, B, C zijn verzamelingen, bewijs dat

   (a) (5 punten) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$,

   (b) (5 punten) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

3. De rij (a_n) is recursief gedefinieerd door $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ en $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ voor $n \geq 3$. Geef een expliciete formule voor a_n en bewijs met volledige inductie dat de formule correct is.

4. (a) (6 punten) Laat $A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = r\}$ voor $r \in [0, \infty)$. Bewijs dat deze collectie verzamelingen $(A_r)_{\ r\in[0,\infty)}$ een partitie is van $\mathbb{R}^2$.

   (b) (4 punten) Definieer een equivalentie-relatie R zodat elke A_r een equivalentie-klasse is van deze relatie R op $\mathbb{R}^2$. Bewijs ook dat dit een equivalentie-relatie is.

5. Geef een ϵ-N bewijs dat de rij $\left(\frac{n^2+3}{n^2-1}\right)_{n\geq 2}$ convergeert.

6. Stel dat $f : A \to B$ en $g : B \to C$ twee functies zijn.

   (a) (5 punten) Bewijs: Als f en g allebei injectief, dan is $g \circ f$ ook injectief.

   (b) (5 punten) Stel $g \circ f$ is surjectief. Bewijs: g is surjectief.

WAT IS WISKUNDE (Nederlandse versie zie ommezijde)
Wednesday January 2, 2013, 13.30 – 16.30 uur

- The marks or grade points are equally distributed among the exercises. 10 points for each exercise.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may refer to the usual basic principles, like e.g. the triangular inequality. It is not permitted to use computers, calculators, books or (lecture) notes.

GOOD LUCK!

1. There is no relation between the two parts (a) and (b) of this exercise.

   (a) (5 points) Prove, using a truth table, that the statement
   $$((\sim P \vee Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$
   is a tautology.

   (b) (5 points) Let $x, y \in \mathbb{Z}$. Prove that if xy^2 is odd, then both x and y are odd.

2. A, B, C are sets, prove that

   (a) (5 points) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$,

   (b) (5 points) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

3. A sequence (a_n) is defined recursively by $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ and $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ for $n \geq 3$, conjecture an explicit formula for a_n and prove, using the principle of mathematical induction, that this formula is correct.

4. (a) (6 points) Let $A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 = r\}$ for $r \in [0, \infty)$. Prove that this collection of sets $(A_r)_{\, r \in [0,\infty)}$ is a partition of $\mathbb{R}^2$.

   (b) (4 points) Define an equivalence relation R such that each A_r is an equivalence class of this relation R on $\mathbb{R}^2$. Prove that this is an equivalence relation.

5. Give an ϵ-N proof that the sequence $\left(\frac{n^2+3}{n^2-1}\right)_{n \geq 2}$ converges.

6. Let $f : A \to B$ and $g : B \to A$ be two functions.

   (a) (5 points) Prove: If f and g are injective, then so is $g \circ f$.

   (b) (5 points) Prove: If $g \circ f$ is surjective, then g is surjective.