WAT IS WISKUNDE (Nederlandse versie zie ommezijde)
Monday, January 2, 2014, 9.00-12.00 h.

- The marks or grade points are equally distributed among the exercises. 10 points for each exercise. Write on each sheet of paper your name and student number.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may refer to some basic principles, like e.g. the triangle inequality and logarithms. It is not permitted to use telephones, computers, calculators, books, handouts or (lecture) notes.

GOOD LUCK!

1. A sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is defined recursively by
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad \text{and} \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \text{ for } n \geq 3.$$
(a) (4 points) Find an explicit formula for a_n with $n \in \mathbb{N}$.
(b) (6 points) Using the strong principle of mathematical induction, prove that your formula is correct.

2. (a) (5 points) Let $x \in \mathbb{R}$. Prove that if $x^4 + 1 \leq x^7 - x^2$, then $x > 0$.
(b) (5 points) Let $n \in \mathbb{Z}$. Prove: If $n^2 \not\equiv n \pmod 3$, then $n \equiv 2 \pmod 3$.

3. (a) (5 points) Give a truth table for the following statement:
$$(\sim(Q \vee R) \Rightarrow P) \Leftrightarrow ((\sim P \wedge Q) \Rightarrow R).$$
(b) (5 points) Let A, B and C be sets, $A \neq \emptyset$. Prove that if $A \times B = A \times C$, then $B = C$. Is the statement also true if $A = \emptyset$?

4. (a) (5 points) Prove that the relation
$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \text{ there exists a } \lambda \in \mathbb{Q},\ \lambda > 0, \text{ such that } a = \lambda b\}$$
is an equivalence relation on $\mathbb{Z}$.
(b) (5 points) Describe all distinct equivalence classes of R. Show that these are all equivalence classes and that they are distinct.

5. (10 points) Give an ϵ-N proof that the sequence
$$a_n = \frac{1}{n^4 + n}$$
converges.

6. (10 points) Give an ϵ-δ proof that
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 1}$$
exists. (N.B. You are not allowed to use the standard rules for the computation of limits.)

WAT IS WISKUNDE (English version on the other side)
maandag 2 januari 2014, 9.00-12.00 u.

- Alle opgaven tellen even zwaar, 10 punten per opgave. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag wel gebruik maken van een aantal basisprincipes, zoals de driehoeksongelijkheid en logaritmen. Het is niet toegestaan telefoons, computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

1. Een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is recursief gedefinieerd door
$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad \text{en} \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \text{ voor } n \geq 3.$$
(a) (4 punten) Vind een expliciete formule voor a_n with $n \in \mathbb{N}$.
(b) (6 punten) Bewijs met het sterke principe van volledige inductie dat jouw formule klopt.

2. (a) (5 punten) Zij $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $x > 0$ als $x^4 + 1 \leq x^7 - x^2$.
(b) (5 punten) Zij $n \in \mathbb{Z}$. Bewijs: Als $n^2 \not\equiv n \pmod 3$, dan is $n \equiv 2 \pmod 3$.

3. (a) (5 punten) Geef de waarheidstabel van de volgende bewering:
$$(\sim(Q \vee R) \Rightarrow P) \Leftrightarrow ((\sim P \wedge Q) \Rightarrow R).$$
(b) (5 punten) Laten A, B en C verzamelingen zijn, $A \neq \emptyset$. Bewijs dat $B = C$ als $A \times B = A \times C$. Is de bewering ook waar als $A = \emptyset$?

4. (a) (5 punten) Bewijs dat de relatie
$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \text{ er bestaat een } \lambda \in \mathbb{Q},\ \lambda > 0,\ \text{zodat } a = \lambda b\}$$
een equivalentierelatie is op $\mathbb{Z}$.
(b) (5 punten) Beschrijf alle verschillende equivalentieklassen van R. Toon aan dat dit alle equivalentieklassen zijn en dat ze verschillend zijn.

5. (10 punten) Geef een ϵ-N bewijs dat de rij
$$a_n = \frac{1}{n^4 + n}$$
convergeert.

6. (10 punten) Geef een ϵ-δ bewijs dat
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 1}$$
bestaat. (N.B. Je mag geen rekenregels voor limieten gebruiken.)