Tentamen Lineaire Algebra
donderdag29 januari 2015, 8.30- 11.30 uur

- Alle opgaven tellen even zwaar, 10 punten per opgave. Gebruik voor iedere opgave een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.
- Het is niet toegestaan telefoons, computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Schrijf op elk vel jenaa , studentnummer en naam practicumleider (Groep 1: João Mestre, Julius Linssen, Richard Schoonhoven; groep 2: Dana Balibanu, Matthijs Lip, Steyn van Leeuwen; groep 3 Jan van Zweeden, Menno de Boer; groep 4: Thom Klaasse, Jetze Zoethout; groep 5: Tom Bannink, Lois van der Meijden

SUCCES!

1. Bewijs met volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal n geldt:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\left(\frac{n+2}{2^n}\right).$$

2. (**nieuw vel papier**) Bewijs de volgende twee beweringen (elk 5 punten):

$$\begin{array}{ll} (a) & A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\,, \\ (b) & (A-B)-C\subseteq A-(B-C)\,. \end{array}$$

3. (**nieuw vel papier**) Deze vraag bestaat uit twee losse onderdelen waartussen geen verband is.

   (a) (5 punten) Geef de waarheidstabel van de volgende bewering:

   $(\sim(P\wedge Q)\Rightarrow R)\Leftrightarrow((P\wedge Q)\wedge\sim R)$.

   (b) (5 punten) Geef een verzameling $A\subseteq\mathbb{R}$ waarvoor de functie $f:A\to\mathbb{R}$, met $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, bijectief is. Bewijs dat f inderdaad bijectief is.

4. (**nieuw vel papier**) (a) (4 punten) Bewijs dat de relatie

$$R=\{((w,x),(y,z))\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 : \text{er bestaat een } \lambda>0 \text{ zodat } (y,z)=(\lambda w,\lambda x)\}$$

   een equivalentierelatie is op $\mathbb{R}^2$.

   (b) (2 punten) Teken in het vlak $\mathbb{R}^2$ de equivalentieklasse van $(2,3)$ en geef alle elementen in deze equivalentieklasse.

   (c) (4 punten) Beschrijf alle verschillende equivalentieklassen van R. Toon aan dat dit alle equivalentieklassen zijn en dat ze allemaal verschillend zijn.

5. (**nieuw vel papier**) Toon m.b.v. de ϵ-δ definitie aan dat de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = (x-1)^3 \cos(x-1)$ continu is in $x = 1$. (N.B. Je mag hier geen rekenregels voor limieten gebruiken.)

6. (**nieuw vel papier**) Toon m.b.v. de ϵ-N definitie aan dat de reeks

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{4^k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

convergeert naar $\frac{4}{3}$.

WAT IS WISKUNDE (Nederlandse versie zie ommezijde)
Monday, November 4 2013, 13.30-16.30 hour

- The marks or grade points are equally distributed among the exercises. 10 points for each exercise. Write the solution to each problem on a separate sheet of paper. On each (separate) sheet you should write your name and student number.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may refer to some basic principles, like e.g. the triangle inequality and logarithms. It is not permitted to use telephones, computers, calculators, books handouts or (lecture) notes.

GOOD LUCK!

1. (**new sheet of paper**) Using the principle of mathematical induction, prove that for every natural number n:
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\left(\frac{n+2}{2^n}\right).$$

2. (**new sheet of paper**) Prove the following two statements (5 points each):
$$\begin{array}{ll}(a) & A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)\,,\\ (b) & (A-B)-C\subseteq A-(B-C)\,.\end{array}$$

3. (**new sheet of paper**) There is no relation between the two parts (a) and (b) of this exercise.

   (a) (5 points) Give a truth table for the following statement:

   $(\sim(P\wedge Q)\Rightarrow R)\Leftrightarrow((P\wedge Q)\wedge\sim R)$.

   (b) (5 points) Find a set $A\subseteq\mathbb{R}$, such that the function $f:A\to\mathbb{R}$, with $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ is bijective. Prove that f is indeed bijective.

4. (**new sheet of paper**) (a) (4 points) Prove that the relation
$$R=\{((w,x),(y,z))\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2:\text{ there exists a }\lambda>0\text{ such that }(y,z)=(\lambda w,\lambda x)\}$$
   is an equivalence relation on $\mathbb{R}^2$.

   (b) (2 points) In the plane $\mathbb{R}^2$ draw the equivalence class of $(2,3)$ and give all the elements that belong to this class.

   (c) (4 points) Describe all distinct equivalence classes of R. Show that these are all equivalence classes and that they are distinct.

5. (**new sheet of paper**) Give an ϵ-δ proof that the function $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defined by $g(x)=(x-1)^3\cos(x-1)$ is continuous at $x=1$. (N.B. You are not allowed to use the standard rules for the computation of limits.)

6. (**new sheet of paper**) Give an ϵ-N proof that the series
$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{4^k}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$
   converges to $\frac{4}{3}$.