Hertentamen Wat is wiskunde? 22 december 2014

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je collegeleider: Johan van de Leur (groep 1), Bas Janssens (groep 2), Thijs Ruijgrok (groep 3), Jan van Zweeden (groep 4), Heinz Hanßmann (groep 5) of Ralph Klaasse (groep 6).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen. Je mag hiervoor wel gebruik maken van een aantal basisprincipes, zoals de driehoeksongelijkheid.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 6 opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Deze vraag bestaat uit twee losse onderdelen waartussen geen verband is.

   (a) Geef de waarheidstabel van de volgende uitspraak:
   $(\sim (P \Longleftrightarrow Q)) \implies ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$.

   (b) Bewijs dat $|x - y| \leq |y - z| + |z - x|$ voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Bewijs met volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ de eindige som

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n}$$

   gelijk is aan

$$\frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n} .$$

3. Geef een ε-N bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met

$$a_n \;=\; \frac{1}{2^n + \frac{1}{n}}$$

convergeert.

4. Bewijs dat de relatie

$$R \;=\; \left\{ ((i,j),(k,l)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \quad : \quad i = k \right\}$$

een equivalentie-relatie is op $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Geef de equivalentie-klasse van $(0,0)$ en beschrijf alle verschillende equivalentie-klassen. Toon aan dat dit alle equivalentie-klassen zijn en dat ze allemaal verschillend zijn.

5. Toon m.b.v. de ε-δ definitie aan dat de functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) \;=\; \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

continu is in $x = -1$. (N.B.: je mag hier geen rekenregels voor limieten gebruiken).

6. We noemen een getal $x \in \mathbb{R}$ twee-algebraïsch (eigenlijk algebraïsch van graad ≤ 2) als er gehele getallen $\ell_0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$ zijn met $\ell_1^2 + \ell_2^2 \neq 0$ en

$$\ell_0 \;+\; \ell_1 x \;+\; \ell_2 x^2 \;=\; 0 \;. \tag{1}$$

   (a) Laat zien dat $\sqrt{2}$ twee-algebraïsch is en dat alle $x \in \mathbb{Q}$ twee-algebraïsch zijn en concludeer dat de verzameling $\mathbb{A} := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ twee-algebraïsch}\}$ oneindig veel elementen bevat.

   (b) Toon aan dat $\mathbb{A}$ dezelfde cardinaliteit heeft als $\mathbb{N}$. *Hint:* gebruik dat (1) hooguit 2 reële oplossingen heeft en construeer een surjectieve afbeelding

$$\Phi \;:\; \mathbb{Z}^3 \times \{1,2\} \;\longrightarrow\; \mathbb{A} \;,$$

   bv. beginnend met $\Phi(\ell_0, 0, 0, w) = 0$ voor alle $\ell_0 \in \mathbb{Z}$, $w \in \{1,2\}$.

   (c) Concludeer dat er reële getallen bestaan die niet twee-algebraïsch zijn.