WISB101, "Wat is Wiskunde", 2015–2016

Docenten: *Carel Faber*, *Johan van de Leur*, *Ralph Klaasse*, *Arjen Baarsma* & *Guido Terra-Bleeker*
Datum: Donderdag, 5 november 2015, 9:00–12:00

- Gebruik een apart vel voor iedere opgave. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel. Zet op het eerste vel ook de naam van je collegeleider: Johan van de Leur (groep 1), Carel Faber (groep 2), Arjen Baarsma (groep 3), Ralph Klaasse (groep 4), of Guido Terra-Bleeker (groep 5).
- Het is niet toegestaan telefoons, computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen. Je mag hiervoor wel gebruik maken van een aantal basisprincipes, zoals de driehoeksongelijkheid.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

Laat A, B en C_n (voor elke $n \in \mathbb{N}$) deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$.

(a) (*4 punten*) Bewijs dat $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Maak hierbij geen gebruik van rekenregels voor verzamelingen.

(b) (*4 punten*) Bewijs dat $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}$.

(c) (*2 punten*) Als $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n} = \emptyset$, wat geldt dan voor de verzamelingen C_n?

Opgave 2 (nieuw vel papier)

(a) (*5 punten*) Laat zien dat $\sim (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$ een tautologie is.

(b) (*5 punten*) Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie en zij $a \in \mathbb{R}$. Geef de ontkenning van de volgende bewering zodanig dat er geen $\sim$ in de formule staat:

$$\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists\, \delta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall\, x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon\,.$$

($\mathbb{R}_{>0}$ is hier de verzameling $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ van positieve reële getallen.)

Opgave 3 (nieuw vel papier)

Beschouw de relatie R op $\mathbb{N}$ gegeven door*

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \mid n\}.$$

Bewijs of *weerleg* de volgende beweringen:

(a) (*2 punten*) R is reflexief;

(b) (*2 punten*) R is symmetrisch;

(c) (*2 punten*) R is transitief;

(d) (*2 punten*) R is een equivalentierelatie;

(e) (*2 punten*) voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ geldt dat als $m\,R\,n$ en $n\,R\,m$ dan ook $m = n$.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

We willen aantonen dat de reeks $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k\,(k+1)}$ convergeert.

(a) (*5 punten*) Bewijs eerst met behulp van volledige inductie voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$ de volgende formule voor de partiële sommen:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\,(k+1)} = \frac{n-1}{n+1}\,.$$

(b) (*5 punten*) Toon vervolgens met een ϵ, N-bewijs aan dat de reeks convergeert. (Bepaal eerst zelf de limiet.)

Opgave 5 (nieuw vel papier)

We beschouwen de functie $f\colon [0,\infty) \to (0,1)$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$.

(a) (*4 punten*) Bewijs dat f injectief is.

(b) (*2 punten*) Is de functie f ook bijectief? Bewijs je bewering.

(c) (*4 punten*) Bewijs dat de intervallen $(0,1)$ en $[0,\infty)$ dezelfde kardinaliteit hebben.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

Laat A en B verzamelingen zijn en neem aan dat $C \subseteq A$ en $D \subseteq B$.

(a) (*5 punten*) Bewijs: als $(x_1, y_1) \in C \times D$ en $(x_2, y_2) \in C \times D$,
dan geldt ook dat $(x_1, y_2) \in C \times D$ en $(x_2, y_1) \in C \times D$.

Zij nu $E \subseteq A \times B$ zodanig dat voor alle $(x_1, y_1) \in E$ en alle $(x_2, y_2) \in E$ geldt dat tevens $(x_1, y_2) \in E$ en $(x_2, y_1) \in E$.

(b) (*5 punten*) Bewijs: er bestaan $F \subseteq A$ en $G \subseteq B$ zodat $E = F \times G$.
HINT: Bekijk o.a. de verzameling $\{a \in A : \exists\, b \in B \text{ met } (a,b) \in E\}$.

*Ter herinnering: de notatie $m \mid n$ betekent dat m een deler is van n, oftewel dat er een $k \in \mathbb{Z}$ bestaat zodat $n = k\,m$.