WISB101, “Wat is Wiskunde”, 2015–2016

Docenten:
Carel Faber, *Johan van de Leur*, *Arjen Baarsma*, *Ralph Klaasse* & *Guido Terra-Bleeker*

Datum: Dinsdag, 22 december 2015, 13:30–16:30

- Gebruik een apart vel voor iedere opgave. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel. Zet op het eerste vel ook de naam van je collegeleider: Johan van de Leur (groep 1), Carel Faber (groep 2), Arjen Baarsma (groep 3), Ralph Klaasse (groep 4), of Guido Terra-Bleeker (groep 5).
- Het is niet toegestaan telefoons, computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen. Je mag hiervoor wel gebruik maken van een aantal basisprincipes, zoals de driehoeksongelijkheid.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a) (*5 punten*) Laat a en b twee rationale getallen zijn met $a < b$. Bewijs dat er een **irrationaal** getal c bestaat waarvoor geldt dat $a < c < b$.
HINT: Je mag gebruik maken van het feit dat $\sqrt{2}$ irrationaal is.

(b) (*5 punten*) Geef de ontkenning van de volgende bewering zodanig dat er geen expliciete ontkenning in de formule staat:

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\, \forall\, b > a,\, \exists\, c \in \mathbb{R},\, a < c < b.$$

Opgave 2 (nieuw vel papier)

Beschouw de relatie R op $\mathbb{R}_{\neq 0}$ gegeven door

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}_{\neq 0} \times \mathbb{R}_{\neq 0} : \tfrac{x}{y} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Hier is $\mathbb{R}_{\neq 0}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ van alle reële getallen ongelijk aan nul. **Bewijs** of **weerleg** de volgende beweringen:

(a) (*2 punten*) Er bestaan irrationale getallen r en s zodat $r \neq s$ en $r \,R\, s$.

(b) (*2 punten*) Er bestaan irrationale getallen r en s zodat $r \neq s$ en $r \not\!R\, s$.

(c) (*1 punt*) R is reflexief.

(d) (*2 punten*) R is symmetrisch.

(e) (*2 punten*) R is transitief.

(f) (*1 punt*) R is een equivalentierelatie.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

Zij $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}$, met $n \geq 2$. Gegeven is dat $a \equiv b \pmod{n}$ en $c \equiv d \pmod{n}$.

(a) (*4 punten*) Bewijs dat $ac \equiv bd \pmod{n}$.

(b) (*2 punten*) Bewijs dat $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$.

(c) (*4 punten*) Zij $k \in \mathbb{N}$. Bewijs met inductie dat $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

Beschouw de verzamelingen $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0\}$ en $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ van alle niet-negatieve rationale resp. reële getallen. **Bewijs** of **weerleg** voor elk van de vier functies hieronder de volgende drie beweringen: de functie is **injectief**; de functie is **surjectief**; de functie is **bijectief**.

(a) (*$2\frac{1}{2}$ punten*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, gegeven door $f(x) = x^2$ voor $x \in \mathbb{R}$;

(b) (*$2\frac{1}{2}$ punten*) $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, gegeven door $g(x) = x^2$ voor $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;

(c) (*$2\frac{1}{2}$ punten*) $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, gegeven door $k(r) = r^2$ voor $r \in \mathbb{Q}$;

(d) (*$2\frac{1}{2}$ punten*) $s : \mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, gegeven door $s(r) = r^2$ voor $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

We willen aantonen dat de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{9k^2 + 3k - 2}$ convergeert.

(a) (*5 punten*) Bewijs met volledige inductie voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$ de volgende formule voor de partiële sommen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{9k^2 + 3k - 2} = \frac{n}{3n + 2}\,.$$

(b) (*5 punten*) Geef een ε, N-bewijs dat de reeks convergeert. (Bepaal zelf de limiet.)

Opgave 6 (nieuw vel papier)

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \left(\sin^2(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x})\right) & \text{als } x \neq 0, \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

(Opmerking: $\sin^2(y)$ is standaardnotatie voor het kwadraat van $\sin(y)$.)

(a) (*5 punten*) Geef een ε, δ-bewijs dat f continu is in 0.

(b) (*5 punten*) Geef een ε, δ-bewijs dat f differentieerbaar is in 0.