Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2004/2005 gegeven door Karma Dajani.

Wat is Wiskunde, tweede deeltentamen (WISB101)
3 februari 2005

- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.

Opgave 1

Geef alle $x \in \mathbb{Z}$ die voldoen aan

$$x \equiv 1 \mod 3, \qquad x \equiv 2 \mod 5, \qquad x \equiv 4 \mod 7.$$

Opgave 2

Zij $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ de functie die wordt gegeven door $f(x) = x^3$. Let op, het domein van deze functie is $\mathbb{Z}$.

a) Bepaal het bereik van f.

b) Is f injectief, surjectief en/of bijectief? Motiveer je antwoord.

c) Bepaal $f^{-1}([-1, 10])$.

Opgave 3

Laat $g : X \to Y$ een functie zijn en $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Bewijs onderstaande beweringen of geef een tegenvoorbeeld.

a) $g(g^{-1}(B)) \subseteq B$,

b) $g^{-1}(g(A)) \subseteq A$,

Opgave 4

Laat $U = \{0, 1\}$ en $V \subseteq \mathbb{N}$ en laat $\mathcal{F}$ de verzameling van alle functies $f : U \to V$ zijn.

a) Toon voor $V = \{1, 2, 3\}$ aan dat $|\mathcal{F}| = 9$.

b) Bewijs voor willekeurige V dat $\mathcal{F}$ en $V \times V$ dezelfde kardinaliteit hebben.

c) Als $|V| = n$ met $n \in \mathbb{N}$, wat is dan $|\mathcal{F}|$? Bewijs je bewering.

Opgave 5

Laat G de deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn die bestaat uit de complexe getallen 1, -1, i, $-i$ en laat $*$ de gewone vermenigvuldiging op $\mathbb{C}$ zijn.

a) Geef de vermenigvuldig tabel van G voor de operatie $*$.

b) Toon aan dat $(G, *)$ een groep is.

c) Laat $H = \{1, -1\}$, toon aan dat $(H, *)$ een ondergroep is van $(G, *)$.

d) Bepaal $[G : H]$, d.w.z. de index van H in G. N.B. de index is het aantal rechter nevenklassen (in het Engels "cosets") van H in G.

Opgave 6

Laat $(\mathcal{G}, *)$ een eindige groep zijn met eenheidselement e. Zij $x \in \mathcal{G}$ en definieer de functie

$$f_x : \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \qquad f_x(z) = x * z$$

a) Bewijs dat f_x een bijectie is.

b) Bepaal f_e.

c) Toon aan dat $f_x \circ f_y = f_{x*y}$ en dat $f_x^{-1} = f_{x^{-1}}$.

d) Bewijs dat als $x * x * x = e$ dat dan $f_x \circ f_x \circ f_x$ de identieke functie op $\mathcal{G}$ is.