Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2005/2006 gegeven door Karma Dajani.

Wat is Wiskunde, tweede deeltentamen (WISB101)
2 februari 2006

- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel toch in de volgende onderdelen gebruiken.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.

Opgave 1 *(10 punten)*

Bepaal alle oplossingen $x \in \mathbb{Z}$ van het stelsel congruenties

$$x \equiv 4 \mod 5,\ x \equiv 1 \mod 7,\ x \equiv 5 \mod 9.$$

Opgave 2 *(10 punten)*

Zij f de reëelwaardige functie gegeven door

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}.$$

a) Bepaal het domein en het bereik van f.

b) Is f injectief? Motiveer je antwoord.

c) Bepaal $f^{-1}([-1, 1])$ en $f^{-1}(f([1, 2]))$.

Opgave 3 *(10 punten)*

Laat $f : X \to Y$ een functie zijn, en $\mathcal{P}(X)$,$\mathcal{P}(Y)$ de machtsverzamelingen van X en Y respectievelijk.

a) Laat zien dat f injectief is **dan en slechts dan als** $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ voor alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

b) Definieer een functie $F : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ door $F(B) = f^{-1}(B)$. Laat zien dat f surjectief is **dan en slechts dan als** F injectief is.

Opgave 4 *(10 punten)*

Zij $\mathbb{Z}_n$ de verzameling van alle congruentieklassen modulo n. Beschouw de operatie $\odot$ op $\mathbb{Z}_n$ gegeven door $[i] \odot [j] = [ij]$.

a) Stel $n = 11$. Bewijs dat $(\mathbb{Z}_{11} - \{0\}, \odot)$ een groep is.

b) Welke van de onderstaande deelverzamelingen kan een ondergroep van $(\mathbb{Z}_{11} - \{0\}, \odot)$ zijn:

$$D = \{[1], [10]\},\ E = \{[1], [4]\},\ H = \{[1], [3], [4], [5], [9]\},\ K = \{[1], [2], [4], [5], [9]\} \text{ en } I = \{[1]\}$$

c) Heeft $(\mathbb{Z}_{11} - \{0\}, \odot)$ een ondergroep van 7 elementen?

Opgave 5 *(10 punten)*

Zij $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ en $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : 2 \in A\}$.

a) Geef een injectieve afbeelding van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ naar $\mathcal{A}$.

b) Bewijs dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $\mathcal{A}$ dezelfde kardinaliteit hebben.

Opgave 6 *(10 punten)*

Gegeven de groepen $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +)$, waarbij $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ en $\cdot$ is de gewone vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$. Definieer op $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ een operatie $\circ$ door

$$(r, x) \circ (s, y) = (r \cdot s, r \cdot y + x).$$

a) Laat zien dat $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \circ)$ een groep is.

b) Is $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \circ)$ Abels (d.w.z. commutatief)? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

c) **Bonusopgave** *(5 punten)*
Zij $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Definieer $H = \{(r, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} : (r, x) \circ (a, b) = (a, b) \circ (r, x)\}$. Bewijs dat $(H, \circ)$ een ondergroep (subgroup) van $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \circ)$ is.