Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2006/2007 gegeven door prof. dr. J.P. Hogendijk.

Uitwerking[1] Wat is Wiskunde A (WISB101) 8 november 2006

Nota Bene: Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke goede uitwerkingen!

Opgave 1

Aan de waarheidstabellen zie je dat geen van de drie expressies a), b), c) logisch equivalent is.

a) $(P \to Q) \to R$ is False alleen als R False en $(P \to Q)$ True is. Dit geeft drie mogelijkheden P True, Q True, R False; P False, Q True, R False; P False, Q False, R False. Voor de andere vijf mogelijkheden is $(P \to Q) \to R$ True.

b) $P \to (R \to Q)$ is alleen False als P True is en $(R \to Q)$ False is, dus alleen voor het geval P True, Q False, R True. In alle andere gevallen is $P \to (R \to Q)$ True.

c) $Q \to (R \to P)$ is alleen False als Q True, R True en P False is. In alle andere gevallen is $Q \to (R \to P)$ True.

Van de drie expressies is dus geen enkel paar equivalent.

Opgave 2

a) De stelling is waar.

Bewijs. Kies $x \in (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$.

Als $x \in (A - B)$ dan is $x \in (A \cup B \cup C)$ maar niet $x \in (A \cap B \cap C)$. Zelfde verhaal voor $x \in (B - C)$ en $x \in (C - A)$.

Dus altijd $x \in (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.

Stel nu $x \in (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.

Stel eerst $x \in A$. Dan zijn er twee mogelijkheden:

Geval 1: x niet $\in B$. Dan $x \in A - B$.

Geval 2: x wel $\in B$. Dan, omdat x niet in $(A \cap B \cap C)$, kan x niet $\in C$ zijn, dus moet $x \in (B - C)$.

Stel nu x niet $\in A$. Zelfde verhaal:

Geval 1: $x \in C$. Dan x in $(C - A)$.

Geval 2: x niet $\in C$. Omdat $x \in (A \cup B \cup C)$ moet dan $x \in B$, dus $x \in B - C$.

We hebben nu alle mogelijke gevallen gehad. In al deze gevallen is dus $x \in (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$.

Conclusie: $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$. $\square$

b) De stelling is niet waar.

Bewijs. Tegenvoorbeeld: $A = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}, B = \{4, 5\}, D = \{5, 6\}$.

Dan zijn $A \cap B$ en $C \cap D$ leeg, dus $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ is de lege verzameling.

Verder $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$, $C \cup D = \{2, 3, 5, 6\}$.

Dus $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \{2, 5\}$. $\square$

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`

Opgave 3

Zij $P(n)$ de bewering $(1-\frac{1}{k})^n \geq (1-\frac{n}{k})$.

Bewijs. Stap 1. Er geldt $(1-\frac{1}{k})^1 = (1-\frac{1}{k})$ dus
$(1-\frac{1}{k})^1 \geq (1-\frac{1}{k})$ dus $P(1)$ is waar.

Stap 2. Stel $P(n)$ is waar.
Dan geldt: $(1-\frac{1}{k})^{n+1} = (1-\frac{1}{k})^n \cdot (1-\frac{1}{k}) \geq (1-\frac{n}{k}) \cdot (1-\frac{1}{k})$
(omdat $(1-\frac{1}{k}) \geq 0$).
en $(1-\frac{n}{k}) \cdot (1-\frac{1}{k}) = (1-\frac{n+1}{k}+\frac{1}{k^2}) \geq (1-\frac{n+1}{k})$.

Conclusie: $(1-\frac{1}{k})^{n+1} \geq (1-\frac{n+1}{k})$. Dus $P(n+1)$ is waar.

Conclusie: $P(n)$ is waar voor alle natuurlijke getallen n. □

Opgave 4

We vinden eerst één oplossing van $33x + 23y = 1$ m.b.v. het Euclidisch algoritme.
Er geldt: $33 = 1 \cdot 23 + 10$.
$23 = 2 \cdot 10 + 3$.
$10 = 3 \cdot 3 + 1$.
Dus $1 = 10 - (3 \cdot 3) = 10 - 3 \cdot (23 - 2 \cdot 10) = 7 \cdot 10 - 3 \cdot 23$
$= 7 \cdot (33 - 23) - 3 \cdot 23 = 7 \cdot 33 - 10 \cdot 23$.
Dus $x = 7, y = -10$ is één oplossing van $33x + 23y = 1$.
(Controle: $33 \cdot 7 = 231$ en $10 \cdot 23 = 230$).

Conclusie: $x = 14, y = -20$ is één oplossing van $33x + 23y = 2$.
Verder is x, y een andere oplossing van $33x+23y = 2$ dan en slechts dan als $33(14-x)+23(-20-y) = 0$. Omdat de grootste gemene deler van 33 en 23 1 is (zoals boven aangetoond), is deze vergelijking equivalent met
$(14 - x) = 23k, -20 - y = -33k$ voor zeker geheel getal k.
De algemene oplossing van de vergelijking is dus
$x = 14 - 23k, y = -20 + 33k$ waarbij k elk geheel getal mag zijn.
We controleren door invullen:
$33(14 - 23k) + 23(-20 + 33k) =$
$33 \cdot 14 + 23 \cdot (-20) + 33 \cdot (-23k) + 23 \cdot (33k) = 462 - 460 + 0 \cdot k = 2$.

Opgave 5

a) *Bewijs.* Stel x en y en z zijn natuurlijke getallen.

x^2 is het kwadraat van een natuurlijk getal, dus xRx, dus R is reflexief.

Stel xRy, dan is xy het kwadraat van een natuurlijk getal, dus yx is hetzelfde kwadraat, dus yRx. Dus R is symmetrisch.

Stel xRy en yRz. Dan zijn er natuurlijke getallen m en n met $xy = m^2$ en $yz = n^2$, dus $xy^2z = (mn)^2$, dus $xz = (mn/y)^2$.

xz is dus in ieder geval het kwadraat van een breuk.

Stel deze breuk is p/q waarbij q geen deler is van p.

Dan is q^2 wel een deler van p^2 want $p^2 = xzq^2$.

Tegenspraak (als q geen deler is van p moet er een priemfactor zijn waarvan q een hogere macht bevat dan p. Dan moet q^2 ook een hogere macht van die priemfactor bevatten van p^2.)

Dus xz is het kwadraat van een natuurlijk getal.

R is dus transitief.

Conclusie: R is een equivalentierelatie. □

b) De klasse [1] bestaat uit alle natuurlijke getallen n zodat $1 \cdot n$ een kwadraat is van een natuurlijk getal. Dus [1] is de verzameling van alle kwadraten van natuurlijke getallen.

c) Als p en q twee verschillende priemgetallen zijn, dan geldt niet pRq (want als wel pRq zou gelden, zou pq een kwadraat zijn, maar dat is niet het geval; stel $pq = k^2$ dan bekijken we de ontbinding van k. Als k een priemfactor r bevat, volgt dat pq twee priemfactoren r bevat, tegenspraak.

Conclusie: de klasses van priemgetallen zijn allemaal verschillend. Omdat er oneindig veel priemgetallen zijn, zijn er ook oneindig veel equivalentieklasses.

Opgave 6

a) $p = 5 = 6 \cdot 1 - 1$.

Elk natuurlijk getal groter dan 6 is van de vorm $6n + r$ met $n \geq 1$ en r de rest na deling door 6, dus de mogelijkheden zijn $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Als $r = 0, r = 2$, of $r = 4$, heeft het getal $6n + r$ een factor 2. Als $r = 3$, heeft $6n + r$ een factor 3. Als $6n + r$ een priemgetal is groter dan 6, dan moet dus $r = 1$ of $r = 5$.

Nu is $6n + 5 = 6(n + 1) - 1$. Hiermee is het gevraagde bewezen.

b) Wie dit onderdeel precies wil doen bewijst het met volledige inductie:

Bewijs. Zij $P(k)$ de bewering: elk product van k getallen van de vorm

$6n_i + 1$ heeft zelf de vorm $6n + 1$ voor een natuurlijk getal n.

$P(1)$ is waar, want $6n_1 + 1$ heeft de vorm $6n + 1$ voor $n = n_1$.

Stel $P(k)$ is waar.

Bekijk een product van $k + 1$ getallen van de vorm $6n_i + 1$
voor $1 \leq i \leq k + 1$, waarbij alle n_i natuurlijke getallen zijn.

Nu is $P(k)$ waar, dus $(6n_1 + 1) \ldots (6n_k + 1) = (6m + 1)$ voor een zeker natuurlijk getal m.

Dus $(6n_1+1) \ldots (6n_k+1)(6n_{k+1}+1) = (6m+1)(6n_{k+1}+1) = 6(6mn_{k+1}+m+n_{k+1})+1 = 6n+1$ met $n = 6mn_{k+1} + m + n_{k+1}$. Deze n is een natuurlijk getal. Dus $P(k + 1)$ is waar.

Conclusie: $P(n)$ is waar voor alle n. □

c) Stel het aantal priemgetallen van de vorm $6n - 1$ is eindig.

Noem P het product van al deze priemgetallen en stel $Q = 6P - 1$. Laat a het grootste priemgetal zijn van de vorm $6n - 1$. Dan is $a \geq 11$.

Duidelijk is $Q > 5a > a$ want 5 is een factor van P.

Dus kan Q zelf niet priem zijn.

Dan is Q het product van priemfactoren.

Q is niet deelbaar door 2 en 3. Dus zijn alle priemfactoren van Q van de vorm $6n - 1$ of $6n + 1$ (onderdeel a).

Stel Q heeft alleen priemfactoren van de vorm $6n + 1$. Dan moet Q van de vorm $6n + 1$ zijn vanwege onderdeel (b). Dit kan niet, want $Q = 6P - 1$.

Conclusie: Q heeft een priemfactor q van de vorm $6n - 1$. Die factor q moet dan ook P delen. Maar Q $= 6P - 1$. Dus q deelt $6P$ en q deelt $6P - 1$. Conclusie: q deelt 1. Tegenspraak.

Conclusie: er zijn oneindig veel priemgetallen van de vorm $6n - 1$.