In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2007/2008 gegeven door diverse docenten.
Het tentamen is samengesteld/gemaakt door dhr. K. Slooten.

Wat is wiskunde B (WISB101)
31 januari 2008

Alle opgaven tellen even zwaar. Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen. Het gebruik van hulpmiddelen is niet toegestaan. Laat ook zien hoe je aan je antwoord bent gekomen.

Opgave 1

Bepaal alle $x \in \mathbb{Z}$ die voldoen aan

$$x \equiv 1 \bmod 2, \quad x \equiv 4 \bmod 7, \quad x \equiv 10 \bmod 15.$$

Opgave 2

Laat $f : X \to X$ een bijectieve functie zijn. Neem aan dat er een functie $g : X \to X$ bestaat zodat $f \circ g \circ f^{-1} = g$.

a) Bewijs of geef een tegenvoorbeeld van de volgende uitspraak: g is surjectief.

b) Zij $V = \{x \in X \mid g(x) = f(x)\}$. Neem aan dat V eindig is. Bewijs dat g, beperkt tot V, een bijectie is van V naar V.

Opgave 3

Laat f de reëelwaardige functie zijn die gegeven wordt door het volgende functievoorschrift:

$$f(x) = \frac{1}{x(2-x)}.$$

a) Laat D het natuurlijke domein van f zijn, d.w.z. de grootste deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarop f goed gedefiniëerd is. Bepaal D. Is f injectief? Is f surjectief op $\mathbb{R}$? Zo nee, wat is het beeld van f?

b) Bepaal $f^{-1}([-1, 0])$.

c) Laat zien dat f injectief is op $[1, 2)$. Bepaal op dit interval f^{-1}.

Opgave 4

Zij $(G, \star)$ een eindige groep en $a \in G$. Definieer $a^0 = e$, $a^1 = a$, $a^2 = a \star a$, $a^3 = a \star a \star a$, enz.

a) Bewijs dat er een $k \in \mathbb{N}$ is zodat $a^k = e$.

b) Zij m het kleinste natuurlijke getal waarvoor $a^m = e$. Het getal m heet de orde van het element a. Bewijs dat $H = \{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$ een ondergroep is van G.

c) Zij $a \in G$. Bewijs dat de orde van a een deler is van $|G|$.

Opgave 5

Zij $V \subset \mathbb{N}$ en V oneindig.

a) Bedenk een injectie van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ naar $\mathcal{P}(V)$.

b) Bewijs dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $\mathcal{P}(V)$ dezelfde kardinaliteit hebben.

Opgave 6

Laat G een groep zijn met twee ondergroepen H en K. Neem aan dat er $a, b \in G$ zijn zodat $aH = bK$.

a) Bewijs dat $\{a^{-1}b, b^{-1}a\} \subset H \cap K$.

b) Bewijs dat $H = K$.