Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB101 werd in 2008-2009 gegeven door Dr. M. Ruijgrok.

Hertentamen Wat is Wiskunde? B (WISB101)
17 maart 2009

Laat duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel wel in de volgende onderdelen gebruiken. Boek, aantekeningen noch rekenmachines mogen gebruikt worden.

Opgave 1.

De ijsplaneet Hoth heeft drie manen: Xantippe, Ypsilon en Zeno. Deze manen hebben een omlooptijd van respectievelijk 7, 11 en 15 dagen. Elke maan is maar gedurende één nacht van haar omloopperiode 'vol'. Als je 's nachts naar de Hothse hemel kijkt zou je twee halve manen en één volle kunnen zien, of één kwart-maan, één halve en één driekwart, enz.
De Hothianen gebruiken de stand van de manen voor hun tijdsrekening. Zo begint een nieuw jaar op de dag nadat alle drie manen tegelijk vol waren.

a) Hoeveel dagen heeft een jaar op Hoth?

b) In de Hothse tijdsrekening wordt een dag van het jaar gekarakteriseerd door drie gehele getallen (x, y, z), met $1 \leq x \leq 7$, $1 \leq y \leq 11$, $1 \leq z \leq 15$. Het getal x geeft aan in welke dag van haar periode Xantippe staat, gerekend vanaf de laatste volle maan, en evenzo y voor Ypsilon en z voor Zeno. De eerste dag van het jaar is $(1, 1, 1)$, de negentiende dag is $(3, 8, 4)$ en de laatste dag is $(7, 11, 15)$.
Een speciale feestdag op Hoth is Donkerste Nacht, die wordt gevierd op $(4, 6, 8)$. Verklaar de naam van de feestdag. Op de hoeveelste dag van het jaar valt Donkerste Nacht?

Opgave 2.

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld

a) Als $n \in \mathbb{N}$ en $n \equiv 1\,(mod\,4)$, dan is n **niet** te schrijven als $n = a^2 + b^2 + c^2$, met $a, b, c \in \mathbb{N}$ en a, b en c allen verschillend van elkaar.

b) Als $n \in \mathbb{N}$ en $n \equiv 3\,(mod\,4)$, dan is n **niet** te schrijven als $n = a^2 + b^2$, met $a, b \in \mathbb{N}$.

Opgave 3.

Zij $D \subset \mathbb{R}$ en $f : D \to \mathbb{R}$ een functie met functievoorschrift:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}.$$

a) Bepaal het natuurlijke domein D van f, d.w.z. de grootste deelverzameling D van $\mathbb{R}$ zodat $f : D \to \mathbb{R}$ goed gedefinieerd is. Is f injectief? Is f surjectief?

b) Geef een interval $J_1 = [a, b]$ met $a < b$ zodat $f(f^{-1}(J_1)) = J_1$.

c) Geef een interval $J_2 = [c, d]$ met $c < d$ zodat $f(f^{-1}(J_2)) \neq J_2$.

d) Gegeven is dat de functie f injectief is op het interval $[1, \infty)$. Bepaal een deelverzameling $C \subset \mathbb{R}$ zodat $f : [1, \infty) \to C$ bijectief is en geef het functievoorschrift van $f^{-1} : C \to [1, \infty)$.

Opgave 4.

Zij $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$ en $J = (1,\infty) \subset \mathbb{R}$.
Zij verder $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\} \backslash \{(0,0)\}$ en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 1\}$.

a) Geef een bijectie $I \to J$.

b) Laat door middel van een expliciete bijectie zien dat S en A dezelfde cardinaliteit hebben.

Opgave 5.

Laat $f : A \to B$ en $g : B \to A$ surjectieve functies zijn. In de volgende onderdelen ga je bewijzen dat A dan dezelfde cardinaliteit heeft als B. Dit resultaat heet de *duale Schroeder-Bernstein stelling.*

a) Definieer $S_b = \{a \in A \,|\, f(a) = b\}$. Laat zien dat de familie van verzamelingen $\mathcal{S} = \{S_b \,|\, b \in B\}$ een partitie van A vormt.
Ter herinnering: een familie $\mathcal{X}$ van deelverzamelingen van X heet een partitie van X als alle elementen van $\mathcal{X}$ niet-leeg zijn, de doorsnede van twee verschillende elementen van $\mathcal{X}$ leeg is en de vereniging van alle elementen uit $\mathcal{X}$ gelijk is aan X.

b) Volgens het Keuzeaxioma bestaat er een functie $\tilde{f} : B \to A$, zodat voor elke $b \in B$ geldt $\tilde{f}(b) \in S_b$. Laat zien dat $\tilde{f}$ injectief is.

c) Bewijs dat er een injectie $\tilde{g} : A \to B$ bestaat.

d) Bewijs dat de verzameling A dezelfde cardinaliteit heeft als B.

e) Laat met behulp van de duale Schroeder-Bernstein stelling zien dat de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ aftelbaar is.