Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB111 werd in 2003/2004 gegeven door Erik van den Ban.

Inleiding Analyse (WISB111)
13 april 2004

- Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Alle vijf opgaven tellen even zwaar.

Opgave 1

a) Bewijs dat er een $\delta_1 > 0$ bestaat zodat

$$\|(x,y)-(1,2)\| < \delta_1 \Rightarrow y \geq 1$$

b) Zij $\delta_1 > 0$ als in (a). Toon aan dat voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x,y)-(1,2)\| < \delta_1$ geldt:

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\right| \leq |x-1| + \tfrac{1}{2}|y-2|$$

c) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

Opgave 2

Bereken de volgende limieten:

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+1} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{x^2-1}$$

Geef daarbij precies aan welke rekenregels u gebruikt.

Opgave 3

We beschouwen de verzameling $U \subset \mathbb{R}^2$ bestaande uit de punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $x^2 - y^2 > 1$ en $x > 0$.

a) Bewijs dat U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is;

b) bewijs dat de verzameling $L := \{(x,0) | x > 1\}$ gesloten is in U;

c) bepaal de afsluiting $\bar{U}$ van de verzameling U. In dit onderdeel wordt geen bewijs verlangd.

Opgave 4

We definiëren de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 3$ en

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + \frac{5}{a_n})$$

a) Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\sqrt{5} \leq a_{n+1} \leq a_n$;

b) toon aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert;

c) bepaal $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Opgave 5

Zij (V, d) een metrische ruimte, A een deelverzameling van V, en $r > 0$ een positief reëel getal. We definiëren B_r als de verzameling van punten $x \in V$ waarvoor een punt $a \in A$ bestaat zodat $d(x, a) < r$.

a) Zij $p \in B_r$. Geef de definitie van 'p is een inwendig punt van B_r';

b) toon aan dat de verzameling B_r open in V is.

We definiëren C_r als de verzameling van punten $x \in V$ met de eigenschap dat $d(x, a) \geq r$ voor alle $x \in A$.

c) Bewijs dat de verzameling C_r gesloten is in V.