Tentamen Analyse

29 juni 2015, 13:30-16:30

- Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van je werkgroepleider (Davide Alboresi, Ralph Klaasse, KaYin Leung of Boris Osorno Torres) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een strikt monotoon stijgende functie.

(a). Bewijs dat f continu is dan en slechts dan als er $c, d \in \mathbb{R}$ bestaan met $f\big([a, b]\big) = [c, d]$.

(b). Laat $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ een strikt monotoon stijgende continue functie. Bewijs dat er een inverse functie $g^{-1} : g\big([a, b]\big) \to \mathbb{R}$ bestaat en dat g^{-1} een strikt monotoon stijgende continue functie is.

2. Gegeven is een niet-lege verzameling $V \subset \mathbb{R}^n$ en een punt $a \in \mathbb{R}^n$. De Euclidische norm wordt gegeven door

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad \text{voor} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(a). Toon aan dat $d(x, y) := \|x - y\|$ voor $x, y \in \mathbb{R}^n$ een metriek op $\mathbb{R}^n$ definieert.

(b). Toon aan dat

$$\inf \{d(a, x) \mid x \in V\}$$

bestaat. Dit getal noemen we de afstand van a tot V en noteren we met $d(a, V)$.

(c). Toon aan dat a een limietpunt is van V dan en slechts dan als $d(a, V) = 0$.

(d). Laat V nu gesloten. Bewijs dat er een $b \in V$ bestaat zo dat $d(a, V) = d(a, b)$.

Z.O.Z.

3. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$$

en laat $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ de cirkelschijf met straal 1.

(a). Bereken de stationaire punten van f op heel $\mathbb{R}^2$.

(b). Laat zien dat de beperking van f tot rand van D gerepresenteerd kan worden door de functie $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ met $g(y) = y^2(1-y^2)$. Bepaal de extrema van g.

(c). Bepaal de extrema van f op D en geef aan of de gevonden extrema lokaal dan wel globaal zijn. Bewijs je beweringen.

4. Laat $L : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{voor} \quad x > 0.$$

(a). Bewijs dat L strikt monotoon stijgend en differentieerbaar is op $(0,\infty)$.

(b). Toon aan dat $L(2) > 0$.

(c). Bewijs dat $L(xy) = L(x) + L(y)$ voor $x, y \in (0,\infty)$.

(d). Toon aan dat voor $n \in \mathbb{Z}$ geldt $L(2^n) = nL(2)$.

(e). Bewijs dat $L : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ een bijectie is.

5. (Bonusopgave.) Definieer de rij reële getallen $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ door

$$\gamma_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{voor} \quad n = 1, 2 \ldots.$$

Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n \quad \text{bestaat.}$$

Normering:	1(a):15	2(a):10	3(a):5	4(a):5	5:10
	1(b):10	2(b):10	3(b):5	4(b):5	
		2(c):10	3(c):10	4(c):5	
		2(d):5		4(d):5	
				4(e):5	