Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB111 werd in 2004/2005 gegeven door E.P. van den Ban.

Inleiding Analyse, deel 1 (WISB111)
18 april 2005

- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe u aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeldt dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Opgave 1

a) Bewijs dat er een $\delta_1 > 0$ bestaat zo dat

$$\|(x,y)-(2,1)\| < \delta_1 \Rightarrow y \le 2.$$

(3 punten)

b) Zij $\delta_1 > 0$ als in (a). Toon aan dat voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x,y)-(2,1)\| < \delta_1$ geldt:

$$|xy-2| \le 2|x-2| + 2|y-1|$$

(3 punten)

c) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} xy = 2.$$

(4 punten)

Opgave 2

Bereken de volgende limieten, en geef daarbij precies aan welke rekenregels u gebruikt.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n+1}$ *(5 punten)*

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x(x+2))}{x}$ *(5 punten)*

Opgave 3

We beschouwen de verzameling $C \subset \mathbb{R}^2$ bestaande uit de punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $x^2+y^2 < 1$ en $x \neq 0$.

a) Bewijs dat C een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is. *(7 punten)*

b) Geef de afsluiting $\bar{C}$ van de verzameling C. In dit onderdeel wordt geen bewijs verlangd. *(3 punten)*

Opgave 4

We definiëren de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 2$ en

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right), \qquad (n \geq 0).$$

a) Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\sqrt{3} < a_{n+1} < a_n$. *(5 punten)*

b) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert. *(1 punten)*

c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} a_n$. *(4 punten)*

Opgave 5

Gegeven is een metrische ruimte (V, d) en een deelverzameling $A \subset V$. Voorts is voor ieder positief geheel getal n een deelverzameling $D_n \subset V$ gegeven zo dat

$$A \subset \bigcup_{p\in D_n} B(p\,;\frac{1}{n}).$$

a) Toon aan dat voor iedere $a \in A$ geldt $B(a; \frac{1}{n}) \cap D_n \neq \emptyset$. *(3 punten)*

b) Geef de definitie van verdichtingspunt van een verzameling $D \subset V$ en tevens die van de afsluiting $\bar{D}$ van D. *(3 punten)*

c) Zij nu $D = \cup_{n\geq 1} D_n$. Toon aan dat $A \subset \bar{D}$. *(4 punten)*