Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college WISB111 werd in 2005/2006 gegeven door Erik van den Ban.

Inleiding Analyse, eerste deeltentamen (WISB111)
20 april 2006

- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle vijf opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(a) Bewijs dat er een $\delta_0 > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in \,]\,1-\delta_0, 1+\delta_0\,[$ geldt

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{3}{2} \frac{|x-1|}{(1+x^2)}.$$

(b) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Opgave 2. Bereken de volgende limieten:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n \sin n}{n^2+n}\,; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}\,.$$

Geef daarbij precies aan welke rekenregels je gebruikt.

Opgave 3. We beschouwen een functie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ van de vorm

$$f(x) = 1 + 2x + r(x), \qquad (-1 \leq x \leq 1),$$

met $r : [-1,1] \to \mathbb{R}$ een functie die voldoet aan de schatting $|r(x)| \leq x^2$ voor alle $x \in [-1,1]$.

(a) Bewijs dat $\lim_{x\to 0} x^{-1} r(x) = 0$ en dat $r(0) = 0$.

(b) Bewijs dat f differentieerbaar is in 0 en bepaal de afgeleide $f'(0)$.

Opgave 4. Van een rij $(a_n)_{n\geq 0}$ van reële getallen is gegeven dat $a_0 = 1$ en dat

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}, \qquad (n \geq 0).$$

(a) Bewijs dat $1 \leq a_n < a_{n+1} < 3$ voor alle $n \geq 0$.
(b) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ convergeert, en bepaal zijn limiet.

Opgave 5. Gegeven zijn een metrische ruimte (V, d) en een punt $a \in V$.

(a) Toon dat voor alle $x, y \in V$ geldt

$$d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y).$$

(b) Toon aan dat voor alle $x, y \in V$ geldt

$$|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y).$$

(c) Toon aan dat de functie $f : V \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = d(x, a)$ continu is in elk punt $x_0 \in V$.
(d) Bewijs dat de verzameling

$$A := \{x \in V \mid 1 \leq d(x, a) \leq 2\}$$

gesloten is.