MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE TBC VAN A–Eskwadraat.
HET COLLEGE WISB112 WERD IN 2004/2005 GEGEVEN DOOR E.P. VAN DEN BAN.

Inleiding Analyse, hertentamen (WISB112)
29 augustus 2005

- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe u aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeldt dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Opgave 1 *(20 punten)*

a) Toon aan dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ met $|x-2| \leq 1$ geldt

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{1}{4}(|x|+2)\,|x-2|.$$

b) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

Opgave 2 *(20 punten)*

Gegeven is een metrische ruimte V en een deelverzameling $A \subset V$.

a) Geef de definitie van een verdichtingspunt van A en tevens van de afsluiting $\overline{A}$ van A.

b) Zij $O \subset V$ een open verzameling met $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Toon aan dat $O \cap A \neq \emptyset$.

Opgave 3 *(20 punten)*

We definiëren de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 3$ en

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{5}{a_n}).$$

a) Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $\sqrt{5} \leq a_{n+1} \leq a_n$.

b) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert.

c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Opgave 4 *(20 punten)*

We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = xy(5 - x^2 - 2y).$$

a) Schets de nulniveauverzameling van f en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Arceer tevens de verzameling V bestaande uit de punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $x \geq 0,\ y \geq 0$ en $2y \leq 5 - x^2$ (in dit onderdeel worden geen bewijzen verlangd).

In het vervolg mag u zonder bewijs gebruiken dat de verzameling V gesloten en begrensd is.

b) Geef het inwendige $\operatorname{inw} V$ van de verzameling V (hier wordt geen bewijs verlangd).

c) Toon aan dat f op $\mathbb{R}^2$ precies 6 stationaire punten bezit, en bepaal deze. Toon aan dat precies één van deze stationaire punten in $\operatorname{inw} V$ gelegen is.

d) Toon aan dat f op V in precies één punt een maximum aanneemt en bepaal dat maximum.

Opgave 5 *(20 punten)*

Gegeven is een functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ en een constante $M > 0$ zo dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in [0,1]$. Gegeven is voorts een constante δ met $0 < \delta < 1$. We schrijven f_δ voor de beperking van f tot het interval $[\delta, 1]$.

a) Toon aan dat er voor iedere verdeling U van $[\delta, 1]$ een verdeling V van $[0,1]$ bestaat zo dat

$$\underline{S}(f_\delta, U) - \delta M \leq \underline{S}(f, V).$$

b) Toon aan dat voor iedere verdeling U van $[\delta, 1]$ geldt

$$\underline{S}(f_\delta, U) - \delta M \leq \underline{\int_0^1} f(x)\, dx.$$

c) Bewijs de geldigheid van de eerste van de onderstaande ongelijkheden

$$\underline{\int_\delta^1} f(x)\, dx - \delta M \leq \underline{\int_0^1} f(x)\, dx \leq \overline{\int_0^1} f(x)\, dx \leq \overline{\int_\delta^1} f(x)\, dx + \delta M.$$

In het vervolg mag u de geldigheid van alle ongelijkheden gebruiken.

Gegeven is nu dat f Riemann-integreerbaar is over $[\delta, 1]$ voor iedere constante δ met $0 < \delta < 1$.

d) Toon aan dat f Riemann-integreerbaar is over $[0,1]$ en dat

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 f(x)\, dx.$$