Inleiding in de Analyse 1b (WISB112)
9 juli 2002
Hertentamen Analyse 1B

9 juli 2002, 9:00 - 12:00 uur

- Schrijf op ieder vel **uw naam**, en bovendien op het eerste vel uw **studentnummer**, de naam van uw practicumleider (Barbara van den Berg, Corrie Quant, Luc Vrancken) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe u aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als u een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeldt dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als u een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** U mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 4 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1

We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = (x^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 7).$$

(a) Schets de nulniveauverzameling van f en geef aan waar f positief respectievelijk negatief is. Arceer tevens de verzameling V bestaande uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x^2 - y^2 - 1 \leq 0$ en $x^2 + y^2 - 7 \leq 0$ (in dit onderdeel worden geen bewijzen verlangd).

(b) Bewijs dat de verzameling V gesloten en begrensd is.

(c) Geef het inwendige V^{inw} van de verzameling V (hier wordt geen bewijs verlangd).

(d) Toon aan dat f op $\mathbb{R}^2$ precies 9 stationaire punten bezit, en bepaal deze.

Als de berekening in (d) correct is uitgevoerd, dan blijkt dat precies drie van de gevonden stationaire punten in V^{inw} liggen; dit zijn de punten $(0, 0), (0, \sqrt{3})$ en $(0, -\sqrt{3})$. Dit gegeven mag u in het vervolg gebruiken.

(e) Bewijs dat f op V in precies twee punten een maximale waarde aanneemt en bepaal die maximale waarde.
Opmerking: Hierbij mag alleen gebruikt gemaakt worden van de theorie die in de cursussen Analyse 1 A,B behandeld is.

Opgave 2

We beschouwen de rij $(s_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad (n \geq 1).$$

(a) Toon aan dat voor alle $n \geq 1$ geldt $s_{2n} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n+1} \leq s_{2n-1}$.

(b) Toon aan dat de deelrijen $(s_{2n})_{n\geq 1}$ en $(s_{2n-1})_{n\geq 1}$ convergeren.

(c) Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$.

(d) Zij S de gemeenschappelijke waarde van de limieten uit het vorige onderdeel. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} s_n = S$.

Opgave 3

We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = xe^{x^2}.$$

(a) Toon aan dat de functie f differentieerbaar is en bepaal zijn afgeleide.

(b) Toon aan dat de functie f injectief is.

(c) Toon aan dat de functie f surjectief is op $\mathbb{R}$, d.w.z. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

De functie f is derhalve bijectief en heeft een inverse $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(d) Toon aan dat de functie g differentieerbaar is en dat voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt: $0 < g'(y) \leq 1$. Toon aan dat er precies één $y_0 \in \mathbb{R}$ bestaat met $g'(y_0) = 1$.

Opgave 4

We beschouwen een begrensde functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) Gegeven is een deelinterval $I := [a,b] \subset [0,1]$. Toon aan dat voor elke $\delta > 0$ een $c \in [a,b]$ bestaat met $f(c) > \sup_I f - \delta$.

Zij $V = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ een verdeling van $[0,1]$. Onder een collectie strooipunten bij V verstaan we een verzameling $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, met $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, voor alle $j = 1, \ldots, n$. Bij V, Ξ definiëren we de Riemann som

$$S(f, V, \Xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

(b) Toon aan dat voor elke collectie strooipunten Ξ bij V geldt:

$$\underline{S}(f, V) \leq S(f, V, \Xi) \leq \overline{S}(f, V).$$

(c) Toon aan dat voor elke verdeling V en elke $\delta > 0$ een collectie strooipunten Ξ bestaat zo dat $S(f, V, \Xi) > \overline{S}(f, V) - \delta$.

(d) Formuleer een soortgelijke uitspraak als in (c) met een ondersom in plaats van een bovensom. Hier wordt geen bewijs verlangd.

(e) Gegeven is dat voor elke $\eta > 0$ een verdeling V van $[0, 1]$ bestaat zo dat voor elk tweetal collecties strooipunten Ξ_1, Ξ_2 bij V geldt:

$$|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)| < \eta.$$

Bewijs dat f Riemann integreerbaar is.

$\mathcal{TBC}$ zegt: N.B. de volgende opgave zat niet in het oorspronkelijke tentamen!

Opgave 5

Van een rij $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ is gegeven dat

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \quad (n \geq 1).$$

We veronderstellen eerst dat $a_1 = 5$.

(a) Toon aan dat voor alle $n \geq 1$ geldt $a_n > 3$.

(b) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ monotoon dalend is.

(c) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ convergeert, en bepaal de limiet van de rij.

We veronderstellen nu dat $a_1 = 1$.

(d) Toon aan dat ook in dit geval de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ convergeert, en bepaal de limiet van de rij.